

OPTISCHE TESTS DER ALLGEMEINEN RELATIVITÄTSTHEORIE

Dissertation

der

Fakultät für Physik der
Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von

Wolfgang Schleich
aus Mühldorf/Inn

München, 1. Februar 1984

OPTISCHE TESTS DER ALLGEMEINEN RELATIVITÄTSTHEORIE

Dissertation

der

Fakultät für Physik der
Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von

Wolfgang Schleich
aus Mühldorf/Inn

München, 1. Februar 1984

1. Gutachter: Prof. Dr. H. Wolter
2. Gutachter: Prof. Dr. H. Walther

Auswärtiger Gutachter: Prof. Dr. M.O. Scully

Tag der mündlichen Prüfung: 29. Mai 1984

Zusammenfassung:

In dieser Arbeit behandeln wir Probleme aus dem Grenzgebiet von (Quanten-) Optik und Gravitationstheorie und untersuchen insbesondere optische Tests der allgemeinen Relativitätstheorie.

Es wird ein Formalismus entwickelt, in dem die Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen in einem Gravitationsfeld über eine Wellengleichung für das elektrische Feld beschrieben wird. Diese enthält zwar keine neuen Gravitations-Licht Effekte, erlaubt jedoch die Ableitung der bekannten Effekte bei vorgegebener Metrik aus einer einzigen, kompakten Gleichung. Wir finden so nicht nur neue Ableitungen der schon in der Literatur diskutierten Effekte, wie z.B. der Einsteinschen und der Machschen Lichtablenkung, sondern auch eine einfache Herleitung der Verallgemeinerung des klassischen Sagnac-Effekts. Dieser Effekt ermöglicht prinzipiell, mit Ring-Laser-Gyroskopen Tests der allgemeinen Relativitätstheorie durchzuführen.

In diesem Zusammenhang spielt die Empfindlichkeit dieser optischen Kreisel, die durch das Quantenrauschen im Resonator begrenzt wird, eine wichtige Rolle. Wir untersuchen den Einfluß des Quantenrauschens auf die mittlere Schwebungsfrequenz eines Ring-Laser-Gyroskops mit Zitterantrieb und geben dafür sowohl approximative, analytische Ausdrücke als auch ein exaktes Ergebnis in Form von unendlichen Matrix-Kettenbrüchen an. Auf Grund des Zitterantriebs entstehen zusätzliche "tote Bänder" bei ganzzahligen Vielfachen der Zitterfrequenz, die näherungsweise vom Quantenrauschen in derselben Weise beeinflusst werden, wie beim ungezitterten Gyroskop: Der Übergang vom freien zum eingerasteten Bereich ist nicht mehr scharf, sondern wird durch das Rauschen "ausgeschmiert".

Abschließend diskutieren wir einen Vorschlag mehrerer russischer Autoren, nichtlineare Absorptionsspektroskopie zum Nachweis von Gravitationswellen zu benutzen. Auf Grund der Beschleunigung der Atome durch die Gravitationswelle enthält das Absorptionsspektrum außer dem bekannten Lamb Dip noch zusätzliche Resonanzen. Zu deren Berechnung erweitern wir die halbklassische Lasertheorie auf Atome mit Beschleunigung

und untersuchen insbesondere den Einfluß der thermischen Geschwindigkeit der Atome. Wir zeigen, daß die Berücksichtigung der Brownschen Bewegung nicht, wie die russische Originalarbeit nahelegt, zu einer absoluten Steigerung der Intensität der Seitenbänder führt.

Inhaltsverzeichnis:

0.	Einleitung und Überblick über die Arbeit	1
0.1	Historische Bemerkungen zur Beziehung zwischen Gravitationstheorie und Elektrodynamik	1
0.2	Problemstellung der Arbeit und Überblick über Ergebnisse	3
0.3	Gliederung der Arbeit	9
I.	Die Rolle des Lasers bei Tests der allgemeinen Relativitätstheorie	12
1.1	Einleitung	12
1.2	Rotverschiebung und Synchronisation von Uhren	13
1.3	Nordtvedt Effekt und Laufzeitmessungen zum Mond	15
1.4	Nachweis von Gravitationswellen	18
1.5	Der parametrisierte Nach-Newtonsche Formalismus (Parametrized-Post-Newtonian (PPN) Formalism)	21
II.	Gravitations-Licht Wechselwirkung	25
2.1	Einleitung und Überblick über Kapitel II	25
2.2	Gravitationsfeld als dielektrisches Medium	27
2.3	Ableitung einer Wellengleichung für das elektrische Feld	31
III.	Gravito-Optische Effekte	35
3.1	Einleitung und Überblick über Kapitel III	35
3.2	Radar-Laufzeit Experimente	38
3.3	Einsteinsche Lichtablenkung	41
3.3.1	Lösung der Wellengleichung	41
3.3.2	Einsteinsche Lichtablenkung	44
3.3.3	Verstärkung von Lichtwellen im Gravitationsfeld?	48
3.4	Mitnahme Effekte	49
3.4.1	Lösung der zugehörigen Wellengleichung	51
3.4.2	Machsche Lichtablenkung	53
3.4.3	Gravitations-Faraday-Effekt	56

3.5 Verallgemeinerter Sagnac-Effekt	58
3.5.1 Ableitung der Sagnac-Frequenzverschiebung aus der Wellengleichung	58
3.5.2 Rotierendes Interferometer und klassischer Sagnac-Effekt	61
3.5.3 Gyroskop Experiment	62
IV. Quantenfluktuationen in einem Ring-Laser-Gyroskop mit Zitterantrieb	67
4.1 Allgemeine Einleitung	67
4.1.1 Einleitung und Überblick über die Ergebnisse des Kapitel IV	67
4.1.2 Beziehung zu anderen Arbeiten	70
4.2 Ring-Laser Theorie: Eine Wiederholung	72
4.2.1 Deterministisches Verhalten des Ring- Laser-Gyroskops	72
4.2.2 Quantenrauschen im ungezitterten Gyroskop	74
4.3 Die Zittermethode ohne Rauschen	79
4.4 Schwebungsfrequenz in Anwesenheit von Rauschen im Ring-Laser-Gyroskop mit Zitterantrieb	85
4.5 Approximative Ausdrücke für die mittlere Schwebungsfrequenz in Anwesenheit von Rauschen	88
4.5.1 "Gyroskop-Stufen": Rotationsrate in der Nähe eines ganzzahligen Vielfachen der Zitterfrequenz	89
4.5.2 Zwischen den Stufen	93
4.6 Exakte Methode in Form von unendlichen Matrix Kettenbrüchen	94
4.7 Ergebnisse und Diskussion	97
V. Nachweis von Gravitationswellen mittels nichtlinearer Spektroskopie?	104
5.1 Allgemeine Einleitung und Überblick über Kapitel V	104
5.1.1 Einleitung	104
5.1.2 Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse aus Ref. 32	105

5.1.3 Beschreibung des Modellexperiments zur gesättigten Absorption bei Anwesenheit von Gravitationswellen	109
5.1.4 Überblick über den Gedankengang und Rechnung von Kapitel V	111
5.2 Absorbierte Leistung	113
5.3 Bewegung der Atome	114
5.4 Bevölkerungsmatrix für beschleunigte Teilchen	121
5.5 Absorptionsproblem	128
5.6 Störungstheorie nach der Wechselwirkung	130
5.6.1 Störungstheorie nullter Ordnung	131
5.6.2 Störungstheorie höherer Ordnung und Diskussion	136
5.7 Absorptionsspektrum	142
Anhang A: Ableitung der Wellengleichung	145
Anhang B: Berechnung des Riemann Tensors für eine schwache Gravitationswelle	149
Anhang C: Einfluß der Gravitationswelle auf die Quantenmechanik	151
Anhang D: Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen in Anwesenheit einer Gravitationswelle	153
Anhang E: Integration über die Anfangsbedingungen	157
Anhang F: Berechnung der Polarisierung erster Ordnung	159
Anhang G: Berechnung der Polarisierung dritter Ordnung	167
Referenzen	179

* Eine ähnliche Vorgangung hatte auch schon Maxwell gelehrt.

** Schon Inferring hat in seiner Fußnote 15 seiner Arbeit auf diese Analogie zur Elektrodynamik hingewiesen.

0. Einleitung und Überblick über die Arbeit

0.1 Historische Bemerkungen zur Beziehung zwischen Gravitationstheorie und Elektrodynamik

Vor mehr als hundert Jahren, im Jahre 1879, ist James Clerk Maxwell gestorben und Albert Einstein geboren. Dem einen verdanken wir die Entwicklung der Elektrodynamik, dem anderen die der allgemeinen Relativitätstheorie. Heute wissen wir, in welcher enger Beziehung diese beiden Theorien zueinander stehen: beide Theorien sind Eichtheorien. Doch schon im Jahre 1893, also lange vor der Entwicklung der allgemeinen Relativitätstheorie, hat O. Heaviside eine Theorie der Schwerkraft¹ vorgestellt, die in noch engerem Verhältnis zur klassischen Elektrodynamik steht als die Einsteinsche. Danach soll das Gravitationsfeld denselben Gleichungen genügen wie das elektromagnetische Feld, also den Maxwell Gleichungen*. Die Rolle der Ladung und des Stroms in der Elektrodynamik übernimmt die Masse bzw. der Massenstrom. Daher gibt es auch zwei Arten von Gravitationsfeldern: jede ruhende Massenverteilung erzeugt ein "elektrisches Gravitationsfeld" und jede bewegte Masse einen Strom und daher ein "magnetisches Gravitationsfeld". Die Ausbreitung der Schwerkraft geschieht somit analog zur Elektrodynamik über Wellen, den sogenannten "Schwerewellen". Forward² und Braginsky et al.³ konnten schließlich den Zusammenhang zwischen der allgemeinen Relativitätstheorie von Einstein und der Heavisideschen Theorie herstellen: Im Falle eines schwachen Gravitationsfeldes, das durch sich langsam bewegendende Massen erzeugt wird, kann man nämlich die Einsteinschen Feldgleichungen so umschreiben, daß sie in die Maxwell Gleichungen übergehen⁴.

Schon kurz nach Vollendung der allgemeinen Relativitätstheorie wurde im Jahre 1918 das erste Beispiel eines "magnetischen Gravitationsfeldes" als Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen gefunden. H. Thirring berechnete in seiner Arbeit⁵ "Über die Wirkung rotierender ferner Massen in der Einsteinschen Gravitationstheorie" das Gravitationsfeld einer rotierenden kugelförmigen Massenschale. Dabei fand er neben dem radial symmetrischen Newtonschen Gravitationsfeld noch ein zusätzliches, das sich analog zu einem Magnetfeld aus einem Vektorpotential ergibt**. Die

* Eine ähnliche Vermutung hatte auch schon Maxwell geäußert.

** Schon Thirring hat in einer Fußnote in seiner Arbeit auf diese Analogie zur Elektrodynamik hingewiesen.

Effekte, die von diesem "magnetischen Gravitationsfeld" herrühren, sind jedoch um den Faktor 10^6 kleiner als bei einem Newtonschen Gravitationsfeld. Daher konnten diese Felder auch bis heute noch nicht experimentell nachgewiesen werden.

Eine weitere Hypothese der Heavisideschen Theorie ist die Existenz von Schwerewellen. Diese wurden ebenfalls schon im Jahre 1918 von Einstein⁶ vorhergesagt, konnten aber bis heute noch nicht experimentell verifiziert werden. J. Weber⁷ glaubte im Jahre 1967, daß ihm ein solcher Nachweis gelungen sei, jedoch eine Wiederholung seiner Experimente durch mehrere Gruppen brachte keine Bestätigung. Somit ist die Frage nach der Existenz dieser Wellen wieder offen. Die Suche nach geeigneten Experimenten zur Messung der "magnetischen Gravitation" und die Entwicklung von Gravitationswellen-Detektoren bilden somit den Schwerpunkt der experimentellen Gravitationsphysik.

Neben diesen offenen Fragen dürfen nicht die Erfolge der Einsteinschen Theorie übersehen werden. Als erste war diese in der Lage, die von Leverrier im Jahre 1845 entdeckte Perihelverschiebung des Merkurs zu erklären. Einsteins Berechnung der Lichtablenkung im Gravitationsfeld der Sonne konnte 1919 von Eddington experimentell bestätigt werden und die Mößbauerspektroskopie konnte die Vorhersagen der allgemeinen Relativitätstheorie auch im dritten der drei klassischen Tests, der Rotverschiebung bestätigen⁸.

Andererseits gibt es verschiedene alternative Theorien⁹, so z.B. von Jordan und Brans, Dicke oder die Theorie von Ni, deren Vorhersagen innerhalb der Fehlergrenzen ebenfalls mit den experimentellen Ergebnissen übereinstimmen. Darüber hinaus gibt es ernstzunehmende Kritiker wie Schiff¹⁰, die glauben, daß die Lichtablenkung und die Rotverschiebung keine Tests der allgemeinen Relativitätstheorie darstellen, da sie aus der speziellen Relativitätstheorie unter Benutzung des Äquivalenzprinzips abgeleitet werden können*. So ist es Lenz¹² gelungen, das Schwarzschildsche Linienelement, das eine exakte Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen darstellt, ohne Feldgleichungen zu gewinnen. Dies würde den Test der Perihelverschiebung weniger signifikant machen, der auch nach neueren Messungen nicht mehr unumstritten ist¹³. Es ist daher von

* W. Rindler¹¹ hat am Beispiel eines statischen, parallelen Gravitationsfeldes gezeigt, daß eine solche Argumentation auf von der Einsteinschen Theorie abweichende Ergebnisse führt und somit nicht generell gültig sein kann (siehe auch Erläuterungen auf S. 179 zu Ref. 12).

großem Interesse, neue Möglichkeiten zu Tests der einzelnen Theorien gegeneinander zu finden. Dabei soll ausdrücklich betont werden, daß die Mehrheit der Physiker von der Richtigkeit der Einsteinschen Theorie überzeugt ist. Für sie spricht auch schon die Tatsache, daß sie in der Menge der alternativen Theorien die einfachste ist.

Die Entwicklung des Lasers hat dem Experimentalphysiker neue Möglichkeiten zu Tests der allgemeinen Relativitätstheorie in die Hand gegeben, Laserpulse mit einer Dauer von Piko Sekunden und Cäsium Uhren haben zum erstenmal die experimentelle Realisierung des Einsteinschen Gedanken-Experiments zur Synchronisation von Uhren ermöglicht¹⁴. Die Umlaufbahn des Mondes konnte mittels Laufzeitmessungen eines Laserpulses von der Erde zum Mond und zurück auf 15 cm genau vermessen werden¹⁵. Dies bestätigte, wie wir später sehen werden, die Äquivalenz von schwerer und träger Masse auch für "große" Körper wie Planeten. Die Möglichkeit des Nachweises von Gravitationswellen über ein Laser-Interferometer ist vielversprechend. Der Leiter der Gravitationswellen-Gruppe in Glasgow und Caltech, R. Drever, meint sogar, daß mittels dieser optischen Methode die Existenz dieser Wellen spätestens in 10 Jahren bewiesen sein werde¹⁶.

0.2 Problemstellung der Arbeit und Überblick über Ergebnisse

Diese ersten erfolgreichen Anwendungen des Lasers zu Tests der allgemeinen Relativitätstheorie haben uns veranlaßt, die Gravitations-Licht-Wechselwirkung erneut zu studieren. Dazu werden wir die Ausbreitung eines elektromagnetischen Probesignals in einem Gravitationsfeld untersuchen. Dies soll aus dem Blickwinkel der klassischen Elektrodynamik geschehen, in der ein solcher Prozeß über eine Wellengleichung für die Felder $\vec{E}$ und $\vec{H}$ beschrieben wird. Unser Ziel ist daher, aus den allgemein relativistischen Maxwell Gleichungen solche Wellengleichungen abzuleiten. Da man sich in dieser Verallgemeinerung der Sprache der Tensoralgebra bedient, nehmen sie eine ungewohnte Gestalt an. Deshalb benutzen wir diese Gleichungen in einer Form¹⁷, in der sie an die Elektrodynamik in einem Medium erinnern.

Neben dem elektrischen Feld $\vec{E}$ und dem magnetischen Feld $\vec{B}$ treten so noch die Felder $\vec{D}$ und $\vec{H}$ auf, die über "Materialgleichungen" mit $\vec{E}$ und $\vec{B}$ zusammenhängen. Die Komponenten des dabei notwendigen "Suszeptibilitätstensors" sind durch eine Kombination der metrischen Fundamentalkoeffizienten gegeben. Wegen dieser Analogie, auf die schon Tamm im Jahre 1924 hingewiesen hat, kann das Gravitationsfeld in seiner Wirkung auf die Lichtausbreitung als dielektrisches Medium bezeichnet werden. Effekte wie die Einsteinsche Lichtablenkung werden so auch verständlich .

Ausgehend von diesen Gleichungen haben wir eine Wellengleichung für das elektrische Feld abgeleitet. Diese enthält neben dem üblichen (speziell relativistischen) Wellen-Operator noch "Polarisationsterme" d.h. Treibterme, die die Wirkung des Gravitationsfeldes auf das Licht beschreiben. Diese ändern z.B. die effektive Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts. So ist die Laufzeit eines Signals zwischen zwei Punkten im Raum bei Anwesenheit eines Gravitationsfeldes verschieden von der ohne Gravitationsfeld. Das Gravitationsfeld verursacht so eine Art "Zeitdehnung", die auch mittels Radarwellen beobachtet worden ist¹⁸. Zusätzlich ändert sich die Ausbreitungsrichtung des Lichtes, d.h. man erhält die bekannte Einsteinsche Lichtablenkung. Beide Effekte, die bisher mittels der Geodätengleichung diskutiert wurden, folgen somit bei vorgegebener Metrik auch aus dieser Wellengleichung. Darüber hinaus enthält diese wie die Geodätengleichung auch den Einfluß der "magnetischen Gravitation" auf die Lichtausbreitung. Danach kann das Licht noch eine zusätzliche Ablenkung erfahren, wenn es sich in der Umgebung von rotierenden, schweren Massen ausbreitet. Oft ist damit auch eine Drehung seiner Polarisations-ebene verbunden. Da das Licht durch die Rotation der Masse abgelenkt, also sozusagen "mitgerissen" oder "mitgeführt" wird, spricht man bei diesen Effekten von Mitnahme-Effekten. Diese, zum erstenmal von Skrotskii¹⁹ und Balazs²⁰ diskutierten und von Plebanski¹⁷ korrigierten Effekte folgen bei Vorgabe der Metrik sofort aus der angesprochenen Wellengleichung. Im Jahre 1913 untersuchte Sagnac²¹ ein rotierendes Ring-Interferometer. Ein von einer Lichtquelle ausgesandter Strahl wird dabei über einen Strahlteiler in einen Ring-Resonator eingekoppelt. Dadurch erhält man zwei gegenläufige Wellen, die nach einem Umlauf wieder vereint werden. Bei Rotation des Interferometers um eine Achse senkrecht zu seiner Ebene wird wegen der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit die Laufzeit in Dreh-

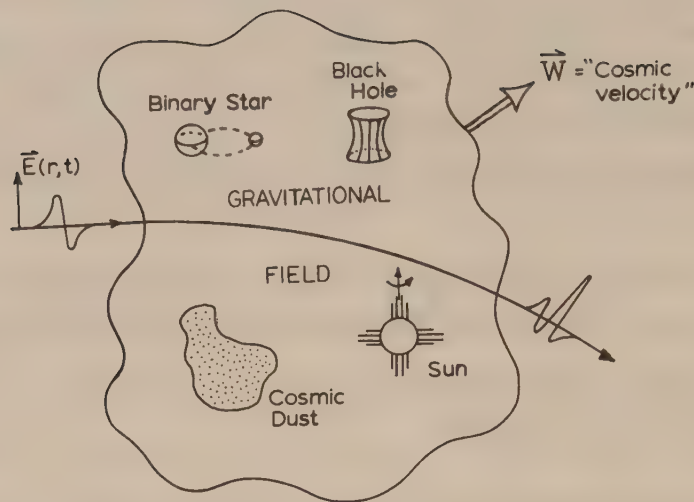
richtung etwas länger als in entgegengesetzter Richtung. Hieraus ergibt sich eine Phasenverschiebung, die proportional zur Rotationsrate ist. Dieser sogenannte Sagnac-Effekt, der kein relativistischer Effekt ist, wurde von Scully²² auf eine beliebige Metrik verallgemeinert und ist ebenfalls in der oben angesprochenen Wellengleichung enthalten.

Der Formalismus der Wellengleichung enthält zwar keine neuen Effekte, leitet jedoch die bekannten Gravitations-Lichteffekte in einer kompakten Form aus nur einer einzigen Gleichung ab. In Fig. 1 fassen wir diese mit den zugehörigen Treibtermen zusammen.

In Ref. 22 und 23 benutzten Scully et al. diesen verallgemeinerten Sagnac-Effekt, um eine allgemein relativistische Diskussion eines Ring-Laser-Gyroskops²⁴ Experiments auf der Erde durchzuführen. Dabei fanden sie zusätzliche Phasen- bzw. Frequenzverschiebungen, die von der "magnetischen Gravitation" und der Existenz etwaiger bevorzugter Bezugssysteme herrühren. Durch Messung dieser Korrekturterme könnten somit im Labor verschiedene Gravitationstheorien gegeneinander getestet werden.

Daher ist es interessant, das Verhalten dieser Ring-Laser-Gyroskope näher zu untersuchen. Die Empfindlichkeit dieser optischen Kreisel ist durch zwei, auch prinzipiell wichtige Effekte, nämlich den Einrasteffekt und das Quantenrauschen begrenzt. Der Einrasteffekt hat seine Ursache in der inkohärenten Streuung durch Imperfektionen der Spiegel, wodurch Strahlung von einer Ausbreitungsrichtung auf die andere übertragen werden kann. Dies führt zu einer (nichtlinearen) Kopplung der beiden gegenläufigen Wellen, mit der Folge, daß deren Frequenzen für kleine, jedoch von Null verschiedene Rotationsraten gleich werden und somit die Schwebungsfrequenz verschwindet²⁵. Man spricht von einem eingerasteten Gyroskop ("locking"), d.h. es ist für Rotationsraten, die in einem Bereich um die Rate Null liegen, dem sogenannten toten Band, unempfindlich.

Das Ziel der Ring-Laser-Gyroskop Technologie ist es daher, dieses tote Band zu verkleinern oder noch besser, es ganz zum Verschwinden zu bringen. Eine Möglichkeit bietet dazu die sogenannte Zittermethode²⁵. Dabei wird der zu messenden Rotationsrate eine zusätzliche, zeitlich periodische Rate so überlagert, daß das Gyroskop die meiste Zeit außerhalb des toten Bandes



$$\square^2 \vec{E} = \mathcal{D}_{\text{Time Delay}}(\vec{E}) + \mathcal{D}_{\text{Deflection}}(\vec{E}) + \mathcal{D}_{\text{Mach}}(\vec{E}) + \mathcal{D}_{\text{Sagnac Cosmos}}(\vec{E})$$

$$\mathcal{D}_{\text{Time Delay}}(\vec{E}) = (\gamma+1)h_{00} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\mathcal{D}_{\text{Deflection}}(\vec{E}) = -\frac{1}{2}(\gamma+1)[(\vec{\nabla} h_{00} \cdot \vec{\nabla})\vec{E} + 2\vec{\nabla} h_{00} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E})]$$

$$\mathcal{D}_{\text{Mach}}(\vec{E}) = 2(\vec{\nabla} \times \vec{h}) \times \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + c[(\vec{\nabla} \times \vec{h}) \cdot \vec{\nabla}] \vec{E}$$

$$\mathcal{D}_{\text{Sagnac Cosmos}}(\vec{E}) = -2(\vec{h} \cdot \vec{\nabla}) \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Figur 1: Eine elektromagnetische Welle, die sich durch ein von der Sonne, einem schwarzen Loch oder kosmischen Staubwolken hervorgerufenen Gravitationsfeld ausbreitet, befriedigt eine Wellengleichung mit Antriebs-
termen. Diesen entsprechen Effekte wie Zeitdehnung, Lichtablenkung und Sagnac Effekt (γ bezeichnet den PPN Raumkrümmungsparameter, und die Metrik sei von der Form $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ mit $\vec{h} = (h_{01}, h_{02}, h_{03})$).

zubringt*. Mittels dieser Methode ist es gelungen, Rotationsraten von der Größenordnung von 10^{-5} mal der Erdrotationsrate zu messen.

In den bisherigen Überlegungen wurde jedoch der Einfluß des Quantenrauschens auf Grund der spontanen Emission vernachlässigt. Das dabei ausgestrahlte elektrische Feld mit statistisch verteilter Phase überlagert sich mit dem im Resonator vorhandenen elektrischen Feld. Dessen Phase ist nicht mehr deterministisch, sie wird zu einer stochastischen Variablen²⁶. Auf Grund dieses Rauschens wird auch die Schwebungsfrequenz zu einer statistischen Größe.

Der Einfluß des Quantenrauschens ist unter gewöhnlichen Arbeitsbedingungen, d.h. bei der Benutzung von Ring-Laser-Gyroskopen zur Navigation in Verkehrsflugzeugen von untergeordneter Bedeutung, da die in diesem Zusammenhang auftretenden Frequenzverschiebungen in der Größenordnung von 10^{-2} mal der Erdrotationsrate liegen²⁴. Um jedoch Tests von metrischen Gravitationstheorien durchführen zu können, muß eine Genauigkeit von 10^{-7} mal der Erdrotationsrate erreicht werden²³. In diesem Fall spielt der Einfluß des Quantenrauschens eine wesentliche Rolle. Aus diesem Grund wurde bereits in mehreren Artikeln²⁶⁻³⁰ das Quantenrauschen in einem ungezitterten Ring-Laser-Gyroskop studiert. In der vorliegenden Arbeit werden diese Untersuchungen auf die Berechnung der mittleren Schwebungsfrequenz eines gezitterten Ring-Laser-Gyroskops ausgedehnt. Dabei werden wir die mittlere Schwebungsfrequenz so wohl in Form von approximativen, analytischen Ausdrücken als auch exakt mit einer Matrixkettenbruch-Methode ableiten. Beide Methoden ergeben übereinstimmend, daß der Zitterantrieb auf Grund der Nichtlinearität der Bewegungsgleichung für die Phase des elektrischen Feldes zusätzliche tote Bänder schafft, die um ganzzahlige Vielfache der Zitterfrequenz zentriert sind. Die Breite des Bandes bei dem r -fachen der Antriebsfrequenz ist näherungsweise durch die Besselfunktion r -ter Ordnung gegeben, deren Argument von der Zitteramplitude und der Zitterfrequenz abhängt. Durch geschickte Wahl dieser Parameter z.B. so, daß das Argument der Besselfunktion gerade mit deren Nullstelle zusammen-

* In der Praxis ist diese zusätzliche Rotationsrate nicht periodisch, sondern wird oft durch einen Zufallsgenerator erzeugt und ist somit aperiodisch. Daher rührt auch der Name "Zitterantrieb".

fällt, kann dieses tote Band zum Verschwinden gebracht werden. Die Existenz dieser zusätzlichen eingerasteten Gebiete ist ein deterministischer Effekt, der nicht vom Quantenrauschen herrührt. Er wurde zum erstenmal von Hutchings und Stjern³¹ mit Argumenten diskutiert, die inkonsistent erscheinen und die auch auf den Fall mit Rauschen nicht verallgemeinert werden können. Das Quantenrauschen beeinflußt ein jedes der toten Bänder näherungsweise in derselben Weise: der Unterschied zwischen eingerastetem und freiem Bereich schwimmt und das Gyroskop geht stetig von dem eingerasteten zum freien über. Diese Aussagen, die sehr leicht aus den approximativen Ausdrücken der mittleren Schwebungsfrequenz abgeleitet werden können, finden ihre Bestätigung in der exakten Kettenbruchmethode.

Das Beispiel des verallgemeinerten Sagnac Effekts und die damit notwendig gewordene Diskussion des Quantenrauschens in einem Ring-Laser-Gyroskop zeigen das interessante Zusammenspiel von zwei so verschiedenen Gebieten der Physik wie allgemeine Relativitätstheorie und Quantenoptik*. Dies wird auch an einem Vorschlag deutlich, Methoden der nichtlinearen Spektroskopie beim Nachweis von Gravitationswellen zu verwenden³². Hierbei pumpt ein Laser Atome, die sich in einem Resonator befinden und eine Brownsche Bewegung ausführen. Sie haben daher eine thermische Geschwindigkeitsverteilung. Eine einfallende Gravitationswelle der Frequenz Ω verursacht eine harmonische Schwingung der Atome um ihre Ruhelage. Die Schwingungsfrequenz ist dabei gerade Ω . Auf Grund des Dopplereffektes sehen daher die Atome nicht nur die Frequenz ν_0 des Lasers, sondern auch die Seitenfrequenzen $\nu_0 \pm \Omega$. Somit treten effektiv drei elektrische Felder mit den Frequenzen ν_0 und $\nu_0 \pm \Omega$ auf. Die Atome können diese absorbieren, falls ihre Geschwindigkeit gerade so ist, daß sie auf Grund des Doppler Effekts resonant zu diesen Feldern werden. Das Absorptionsspektrum, das mit Hilfe eines schwachen Testlasers gemessen wird, enthält somit Resonanzen bei den Frequenzen ν_0 und $\nu_0 \pm \Omega$. Eine Rechnung erster Ordnung in der Rabi-

* Nebenbei sei festgehalten, daß beide auch auf andere Weise in ganz engem Zusammenhang stehen. Sie stammen von demselben "Propheten": A. Einstein, der "Vater" der allgemeinen Relativitätstheorie, schuf mit der rein auf der Statistik beruhenden Ableitung der spontanen und stimulierten Emission die Grundlagen des Lasers.

frequenz zeigt jedoch, daß die Tiefe dieser Seitenbänder zu klein ist, als daß sie gemessen werden könnten. Dies ändert sich drastisch, sobald Korrekturen dritter Ordnung in der Rabifrequenz berücksichtigt werden. Diese führen gemäß Ref. 32 zu einer Verstärkung des Effekts um einen Faktor 10^9 . Die Autoren von Ref. 32 können so prinzipiell Gravitationswellen mit einer Amplitude von $h \sim 10^{-19}$ im Kilohertz Bereich nachweisen. Dies würde eine enorme Verbesserung der Michelson-Interferometer-Methode darstellen, die momentan eine Genauigkeit von 10^{-16} erreicht. Überlegungen von Scully³³ haben jedoch Zweifel an den Ergebnissen von Ref. 32 aufkommen lassen. Dies hat Bordé und Mitarbeiter veranlaßt, die in Ref. 32 durchgeführten Rechnungen zu wiederholen. In verschiedenen Arbeiten^{34,35} haben sie dieses Problem untersucht und ihre Ergebnisse stimmen mit den in Ref. 32 gemachten Aussagen überein. Da die Frage des Nachweises von Gravitationswellen für die allgemeine Relativitätstheorie von großer Bedeutung ist, muß jeder erfolgversprechende Vorschlag genau geprüft werden. Dies hat uns veranlaßt, das Problem nochmals aufzugreifen. Auch unsere Rechnungen stimmen innerhalb der in Ref. 32 und 35 gemachten Näherungen mit deren Ergebnissen überein, jedoch weicht unsere Interpretation stark von der von Nesterikhin et al. ab. Insbesondere zeigen wir, daß der angesprochene Verstärkungsfaktor von der Größenordnung 10^9 nicht eine absolute Änderung der Höhe der Seitenbänder in dieser Größenordnung bringt, und damit auch keine Verbesserung gegenüber dem Fall ohne thermische Bewegung darstellt.

0.3 Gliederung der Arbeit

Im Folgenden soll eine kurze Gliederung der Arbeit gegeben werden. In Kapitel I werden wir auf die Rolle des Lasers bei Tests der allgemeinen Relativitätstheorie eingehen. Diese werden wir sowohl an Hand von erfolgreich durchgeführten Experimenten, wie z.B. der Zeitsynchronisationsexperimente und der Laufzeitmessungen zum Mond, als auch an Experimenten, die gerade ausgeführt werden, wie z.B. den Michelson-Interferometer Experimenten, die dem Nachweis von Gravitationswellen dienen, erläutern. Da die vorliegende Arbeit Probleme aus dem Grenzgebiet zwischen Gravitation und Quantenoptik behandelt, Physiker aber in der Regel auf eines der beiden Gebiete spezialisiert sind, werden wir versuchen, die nötigen Kenntnisse aus diesen Bereichen kurz zusammen-

zufassen. Aus dieser Motivation entspringt die am Ende von Kapitel I gegebene Zusammenfassung des sogenannten parametrisierten Nach-Newton-schen Formalismus (im engl. Original: Parametrized Post-Newtonian (PPN) formalism), der die theoretische Grundlage für viele Tests von metrischen Gravitationstheorien bildet.

In den Kapiteln II und III werden wir die Ausbreitung von Lichtwellen in einem schwachen, zeitunabhängigen Gravitationsfeld untersuchen. Zu diesem Zweck wiederholen wir in Kapitel II zunächst die von Plebanski¹⁷ angegebene Form der allgemein relativistischen Maxwell-Gleichungen, die an die Elektrodynamik in einem dielektrischen Medium erinnert. Davon ausgehend werden wir eine Wellengleichung für das elektrische Feld bei einer gegebenen Metrik in PPN Formalismus ableiten. Die Details dieser langen Ableitung finden sich im Anhang A. In Kapitel III werden wir schließlich diese Wellengleichung im Detail untersuchen und Effekte wie Lichtablenkung, Drehung der Polarisationsrichtung des Lichts und den Sagnac Effekt studieren. Der Diskussion jeder dieser Effekte geht eine ausführliche Einleitung voran, in der die physikalischen Grundlagen erläutert werden. Diese beiden Kapitel lehnen sich eng an die Kapitel 4 und 5 aus Ref. 4 an.

Ein Ergebnis von Kapitel III ist, daß Ring-Laser-Gyroskope prinzipiell geeignet sind, Tests der allgemeinen Relativitätstheorie auszuführen. Im Kapitel IV studieren wir daher das Quantenrauschen in einem gezitterten Gyroskop. Wegen der Länge von Kapitel IV bringen wir gleich zu Beginn eine Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse mit einer Diskussion der in diesem Problemkreis schon existierenden Arbeiten. Wir wiederholen bekannte Tatsachen aus der Ring-Laser Theorie und der Rauschtheorie und erläutern mit heuristischen Überlegungen die Zittermethode. Diese Abschnitte lehnen sich an Kapitel aus einem Übersichtsartikel über Ring-Laser-Gyroskope²⁴ an, der unter der Mitwirkung des Autors entstand. Schließlich werden approximative analytische und exakte Ausdrücke für die mittlere Schwebungsfrequenz in einem gezitterten Ring-Laser-Gyroskop abgeleitet und diskutiert. Diese Abschnitte sind eine ausführliche Fassung der in Ref. 36 und 37 veröffentlichten Arbeiten.

Im Kapitel V schließlich gehen wir auf in den in Ref. 32 geäußerten Vorschlag eines Gravitationswellendetektors ein. Dazu verallgemeinern wir

die semiklassische Lasertheorie von Lamb³⁸ auf beschleunigte Teilchen und vergleichen die so gewonnenen Ergebnisse mit denen in Ref. 32, 34 und 35.

I. Die Rolle des Lasers bei Tests der allgemeinen Relativitätstheorie

1.1 Einleitung

Bei Tests der fundamentalen Zusammenhänge der Physik spielt der Laser wegen der hohen Meßgenauigkeit und der Möglichkeit, nichtlineare Effekte zu erzeugen eine zunehmend wichtiger werdende Rolle³⁹. Beispielsweise bei der Interpretation der Quantenmechanik und des quantenmechanischen Meßprozesses hat die Verwendung des Lasers neue Perspektiven geöffnet. Zum erstenmal kann der Einfluß des Beobachters in der Quantenmechanik in einem sogenannten "Quanten Radierer" Experiment⁴⁰ ("quantum eraser") experimentell untersucht werden. Die Bellsche Ungleichung, mit der die Frage der verborgenen Parameter⁴¹ untersucht werden kann, wurde von A. Aspect mit Laser-Experimenten getestet, wobei übrigens die Quantenmechanik als eindeutiger Sieger hervorging. Laserspektroskopische Methoden werden auch zur Untersuchung von Paritätsverletzungen in Atomen herangezogen⁴². Hieraus erhofft man sich Aufschlüsse über die Gültigkeit der elektroschwachen Feldtheorien nach dem Salam Weinberg Model.

Bei Tests der allgemeinen Relativitätstheorie spielen sowohl der Laser als auch der Maser wegen ihrer hohen Meßgenauigkeit eine entscheidende Rolle. Ein zentrales "Gedanken-Experiment" in der Relativitätstheorie ist die Synchronisation von Uhren durch Lichtsignale¹⁴. Diese "Uhren" sind heute Wasserstoff-Maser oder aber Cäsium-Uhren, die für die Dauer eines Tages eine Stabilität von 2 bis 3 Teilen in 10^{14} erreichen können. Diese Präzisionsuhren haben zusammen mit der Entwicklung von kurzen Laserpulsen im Nano-Sekunden Bereich (10^{-9} sec.) eine experimentelle Verwirklichung dieses Einsteinschen "Gedanken-Experiments" ermöglicht. Cäsium-Uhren, die den Erdball in einem Satelliten umkreisen⁴³, werden die Genauigkeit der Experimente zur Rotverschiebung von Pound, Rebka und Snider⁴⁴ verbessern. Diese experimentellen Möglichkeiten werden wir im Abschnitt 1.2 diskutieren.

Mit Laserpulsen von der Dauer einer Piko-Sekunde konnte der Abstand Erde-Mond auf 15 Zentimeter genau vermessen werden^{15,45}. Dieses Experiment hat die Überprüfung des sogenannten Nordtvedt Effekts⁴⁶ erlaubt, auf den wir im Abschnitt 1.3 näher eingehen werden. Auch diesen Test hat Einsteins

allgemeine Relativitätstheorie glänzend bestanden, während andere alternative Theorien⁹, wie z.B. die Kosmologie von Ni, mit ihren Vorhersagen außerhalb des experimentellen Fehlers liegen. Michelson-Interferometer mit bis zu drei Kilometer langen Lichtwegen entstehen an vielen Plätzen der Erde, z.B. in Caltech, Glasgow, Mailand und München. Diese stellen eine optische Version der Weberschen Gravitationswellen-Detektoren dar, mit deren Hilfe man die Schwerewellen innerhalb der nächsten 10 Jahre hofft nachweisen zu können. Im Abschnitt 1.4 werden wir auf diese Methode eingehen.

Um die Rechnungen für ein bestimmtes Experiment nicht in allen in Frage kommenden Theorien gesondert durchführen zu müssen, wurde der sogenannte PPN Formalismus⁴⁷ entwickelt. In diesem Formalismus sind die Schwachfeld-Näherungen aller metrischen Theorien unter Einführung von 10 Parametern vereinigt. Da dieser die theoretische Grundlage für Tests der metrischen Gravitationstheorien bildet, werden wir ihn in Abschnitt 1.5 kurz erläutern.

1.2 Rotverschiebung und Synchronisation von Uhren

Eine der bekanntesten Vorhersagen der Einsteinschen allgemeinen Relativitätstheorie ist die schon mehrmals angesprochene Rotverschiebung. Bereits aus der speziellen Relativitätstheorie ist bekannt, daß (mit konstanter Geschwindigkeit) bewegte Uhren langsamer gehen als unbewegte. Diese Tatsache findet sich in verallgemeinerter Form in der allgemeinen Relativitätstheorie wieder: Uhren, die in einem Gravitationsfeld ruhen, gehen langsamer als identische Uhren, die sich außerhalb dieses Feldes befinden. Uhren gehen also verschieden schnell, wenn sie an Orten mit unterschiedlichem Gravitationspotential stehen. Somit ist auch die Frequenz ν eines elektromagnetischen Signals rotverschoben, falls das Gravitationspotential ϕ am Ort der Aussendung größer ist, als am Ort der Beobachtung. Für die relative Änderung $\frac{\Delta\nu}{\nu}$ gilt die Beziehung⁸

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{1}{c^2} (\phi(\vec{r}_1) - \phi(\vec{r}_2)) \quad (1.1)$$

sodaß also lediglich die Differenz der Gravitationspotentiale ϕ an den Orten $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ eingeht.

Die ersten Laborexperimente zur Überprüfung der obigen Relation wurden von Pound und Rebka im Jahre 1959 unternommen, wobei γ Strahlen aus dem Zerfall eines isomeren Zustandes in Fe^{57} -Kernen von der Höhe des Turmes der Harvard Universität ausgesandt und auf dem Boden von einem Kristall absorbiert wurden. Wegen Gl.(1.1) muß somit das Emissionsspektrum gegenüber dem Absorptionsspektrum um die Frequenz $\Delta\nu$ verschoben sein. Wichtige Voraussetzung dieser Experimente war die von Mößbauer entdeckte rückstoßfreie γ Emission bei Kernen in einem Kristall bei tiefer Temperatur. Der bei der Emission bzw. Absorption entstehende Rückstoßimpuls wird von dem gesamten Kristall aufgenommen, sodaß die Messung von sehr schmalen Absorptionslinien möglich ist. Zur Beschreibung dieser Experimente genügt es, das Newtonsche Gravitationspotential

$$\phi = -G \frac{M}{r}$$

zu benutzen, wobei die Größe M die Masse der Erde ist. Somit folgt für Experimente an der Erdoberfläche (r_0 ist der Erdradius)

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = - \frac{GM}{c^2 r_0} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{h}{r_0}} \right) \approx - \frac{GM}{c^2 r_0^2} h$$

oder

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = - \frac{g}{c^2} h, \quad (1.2)$$

wobei $g = \frac{GM}{r_0^2}$ die Gravitationsbeschleunigung der Erde und h die Höhendifferenz zwischen Emissions- und Absorptionsort der γ Strahlen bezeichnen. Bei einer Höhendifferenz von $h = 22.6$ m erhält man eine Frequenzverschiebung von

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = - 2.46 \cdot 10^{-15}$$

Pound und Rebka fanden eine Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment von 10%. Diese Arbeiten wurden unter Mitarbeit von Snider fortgesetzt wobei die experimentelle Methoden wesentlich verbessert wurden, so daß jetzt eine Übereinstimmung von 1 % als sicher gilt⁴⁴.

Nach Gl. (1.2) ist die Frequenzverschiebung umso größer je größer die Höhendifferenz h gewählt wird. Um diesen Effekt auszunutzen, läuft seit dem Jahre 1976 ein Experiment von Vessot⁴³ et al., bei dem ein Wasserstoff-Maser, der als Frequenzstandard dient, die Erde in einem Satelliten

in einem Abstand von 10 000 km umkreist. Zur Synchronisation eines entsprechenden Frequenzstandards auf der Erde werden Radarwellen benutzt. Es liegen jedoch noch keine endgültigen Ergebnisse vor, da die Bahnkurve des Satelliten, die durch verschiedene Effekte, die nichts mit der Gravitation zu tun haben, gestört wird, noch nicht genau genug bekannt ist.

Ein ähnliches Experiment wurde von C. Alley et al.¹⁴ in den Jahren 1975-1976 durchgeführt. Dabei wurden Cäsium-Uhren in einem Flugzeug mitgeführt, das in einer Höhe von etwa 10 km flog. Diese Uhren wurden während jeder Phase des Fluges mit identischen (ruhenden) Cäsium-Uhren auf der Erdoberfläche verglichen. Diese Synchronisation von Uhren wurde gemäß des Einsteinschen Gedanken-Experiments mittels Laserpulsen vorgenommen. Diese liefen ausgehend von der Bodenstation zum Flugzeug und wurden dort von einem sogenannten Eck-Reflektor zurückgestrahlt. Mittels dieser Synchronisation konnte die Verlangsamung der Uhren als Funktion der Flughöhe, insbesondere während des Aufsteigens des Flugzeuges gemessen werden. Alley et al. fanden in diesen Experimenten einen maximalen Gangunterschied zwischen den Uhren im Flugzeug und denen am Boden von etwa 50 Nano-Sekunden. Das Verhältnis aus dem vorhergesagten und dem experimentellen Wert war dabei 0.987 ± 0.016 ¹⁴. Diese Experimente sind somit nicht ganz so präzise wie die von Pound, Rebka und Snider. Jedoch wurde in ihnen zum erstenmal die von Einstein entwickelte Methode zur Synchronisation von Uhren mittels Lichtsignalen verwirklicht.

1.3. Nordtvedt Effekt und Laufzeitmessungen zum Mond

Seit den Experimenten von Galilei am schiefen Turm von Pisa ist bekannt, daß alle Körper gleich schnell fallen. Bezeichnen wir die schwere und die träge Masse eines Körpers mit m_s und m_t , so lautet die Newtonsche Bewegungsgleichung

$$m_t a = m_s g$$

wobei a die Beschleunigung des Körpers und g die Erdbeschleunigung bezeichnen. Obige Beobachtung ist daher nur möglich, falls die schwere und die träge Masse gleich groß sind, oder falls das Verhältnis aus m_t

und m_s für alle Körper gleich ist. In der allgemeinen Relativitätstheorie führt diese Äquivalenz zu der Konsequenz, daß man ein Gravitationsfeld lokal durch ein beschleunigtes Bezugssystem ersetzen kann. Somit ist die Äquivalenz von schwerer und träger Masse eine Grundannahme der Einsteinschen Relativitätstheorie. Einstein selbst schreibt⁴⁸: "...nach meiner Auffassung, ruht meine Theorie ausschließlich auf diesem Prinzip." Daher wurden in neuerer Zeit die Experimente von Eotvös und Bessel⁸ zur Bestimmung des Verhältnisses aus m_t und m_s für verschiedene Materialien wiederholt. Die genauesten Experimente von Braginsky und Panov⁴⁹ ergeben für die Massenverhältnisse für Platin und Aluminium

$$\frac{m_t}{m_s} = 1 \pm 2 \cdot 10^{-12}.$$

Aus der speziellen Relativitätstheorie ist die Äquivalenz von Masse und Energie bekannt. Jede Art von Energie trägt somit zur Masse, genauer gesagt, zur trägen Masse eines Körpers, bei. Dabei stellt sich natürlich sofort die Frage, ob die Energie auch in derselben Weise zur schweren Masse beiträgt. Aus den Experimenten von Braginsky und Panov wissen wir, daß dies mit einer Genauigkeit von besser als 10^{-12} der Fall ist. In Arbeiten von Dicke⁵⁰, Schiff⁵¹, Will und Haugan⁵² wurde untersucht, welche Genauigkeit für die $\frac{m_t}{m_s}$ Messungen notwendig ist, um festzustellen, ob die Energien der starken und der elektroschwachen Wechselwirkung unterschiedlich zur schweren oder trägen Masse beitragen. Diese Rechnungen haben gezeigt, daß die Genauigkeit der Braginskyschen Ergebnisse voll ausreicht, um die Gültigkeit des Äquivalenzprinzips für Energien dieser verschiedenen Wechselwirkungen zu beweisen. Es stellt sich dann die Frage, ob dies auch auf die vierte Wechselwirkung, die Gravitation, zutrifft. Dazu stellen wir⁵³ zunächst eine qualitative Überlegung an und betrachten eine kugelförmige Masse mit Radius $R = 1$ m und einer Dichte $\rho = 5$ g/cm³. Für das Verhältnis Δ aus der Selbstenergie $E_s = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$ und der Ruheenergie $E = Mc^2$ folgt sodann

$$\Delta \equiv \frac{|E_s|}{E} = \frac{4}{5} \pi \frac{G \rho R^2}{c^2} \sim 10^{-23} \quad (1.3)$$

Die Rolle der Gravitationswechselwirkung ist also um 11 Größenordnungen kleiner als mit dem Branginsky-Panov-Experiment gemessen werden kann.

Daher können aus diesen Experimenten keine Rückschlüsse auf die Gültigkeit des Äquivalenzprinzips auf dem Niveau der Gravitationswechselwirkung gezogen werden. Wegen der R^2 Abhängigkeit kann jedoch dieser Beitrag bei großen Massen, wie z.B. bei Planeten wichtig werden. Diese Fragestellung wurde von K. Nordtvedt an Hand des Planetensystems Sonne, Mond und Erde untersucht⁵⁴. Falls man annimmt, daß die Gravitations-Selbstenergie der Erde nicht in derselben Weise zu Ihrer schweren bzw. trägen Masse beiträgt, ist die Umlaufbahn des Mondes nicht mehr durch die Gleichheit von Gravitationskraft und Zentrifugalkraft gegeben, sondern es tritt noch eine zusätzliche Kraft, die sogenannte Nordtvedt Kraft, in Richtung der Verbindungslinie Erde-Sonne auf. Diese verursacht eine Abweichung von der durch das klassische Dreikörper Problem gegebenen Bahnkurve⁵⁵. Zur Überprüfung dieser Vorhersage ist es somit notwendig, den Abstand zwischen Erde und Mond genau zu vermessen. Dies wurde durch Laufzeitmessung von Laserpulsen im sogenannten Lunar-Ranging-Retro-Reflector^{15,45} Experiment (LR³) durchgeführt.

Dabei erwiesen sich die von den Apollo 14 und 15 Mannschaften auf dem Mond zurückgelassenen Eck-Reflektoren als nützlich. Diese dienten bei der Messung des Abstandes zwischen Erde und Mond als Referenzpunkt. Ein Laserpuls wurde von der Bodenstation im McDonald Observatorium in Texas ausgesandt, an den Reflektoren auf dem Mond zurückgestrahlt und die Laufzeit gemessen. Die Genauigkeit dieser Messungen betrug eine Nano-Sekunde.

Dies entspricht einer Genauigkeit im Abstand zwischen Auftreffpunkt des Strahls auf den Reflektor und dem Observatorium von weniger als 15 Zentimeter. Es ist wohl die eindruckvollste Anwendung des Lasers zu Tests der allgemeinen Relativitätstheorie.

Nordtvedt konnte zeigen, daß sich das Verhältnis $\frac{m_t}{m_s}$ auf die Form

$$\frac{m_t}{m_s} = 1 + \eta \Delta$$

bringen läßt, wobei Δ durch Gl. (1.3) gegeben ist und η einen Parameter bezeichnet, der die Abweichung von der Äquivalenz zwischen schwerer und träger Masse angibt. Dieser Parameter ist ein Parameter des sogenannten PPN Formalismus auf den wir im Abschnitt 1.5 eingehen werden. Da in Einsteins Theorie die Gleichheit von m_t und m_s gefordert wird, hat in dieser Theorie der Parameter η den Wert Null.

Eine Auswertung der Daten aus diesen Laufzeitmessungen ergab⁴⁵

$$\eta = 0.00 \pm 0.03$$

Somit ist die allgemeine Relativitätstheorie in Übereinstimmung mit diesem Experiment.

Eine alternative Theorie, die Ni Kosmologie, liegt mit ihrer Vorhersage von η außerhalb der Fehlergrenzen des Experiments und scheidet damit als "wahre" Theorie aus. Die Theorie von Brans Dicke und Jordan dagegen enthält eine freie Kopplungskonstante ω , die aus dem Experiment bestimmt werden muß. Diese wurde bisher mit $\omega > 5$ angegeben. Um innerhalb der Fehlergrenzen der Ergebnisse aus den Erde-Mond Laufzeitmessungen zu bleiben, mußte diese jetzt auf $\omega > 30$ erhöht werden. Damit wird diese Theorie der Einsteinschen immer ähnlicher. Mittels des Lasers wurde somit eine Überprüfung des Äquivalenzprinzips auch im "Großen" ermöglicht. Dieses ist dabei eindrucksvoll bestätigt worden.

1.4 Nachweis von Gravitationswellen

Die ersten Versuche zum Nachweis von Gravitationswellen⁵⁶ wurden von J. Weber⁷ durchgeführt. In diesen Experimenten sollten einfallende Gravitationswellen einen Aluminiumzylinder zu longitudinalen Schwingungen anregen und diese Schwingungen sollten gemessen werden. Jedoch erbrachte eine Wiederholung dieser Experimente in verschiedenen Laboratorien der Erde keine Bestätigung der Weberschen Ergebnisse. Die Idee, ein Michelson-Interferometer als Gravitationswellen-Detektor⁵⁷ zu benutzen, ging vom Pionier auf diesem Gebiet, J. Weber aus*. In der Folge davon entstanden an mehreren Orten der Welt Gravitationswellen-Detektoren dieses Typs.

Das Prinzip solcher Detektoren ist das folgende: Die beiden Arme eines Michelson-Interferometers, dessen Spiegel auf frei beweglichen Massen

* In Ref. 58 wird erwähnt, daß Weber diesen Vorschlag in einem Telefongespräch im September 1964 machte.

montiert sind, seien, wie in Fig. 2 dargestellt. entlang der x bzw. y Achse orientiert⁵⁹. Fällt nun eine Gravitationswelle senkrecht zur Ebene des Interferometers ein, so wird, wie wir in Kapitel V zeigen werden, der auf der x-Achse befindliche Spiegel relativ zum Strahlteiler* oszillieren**. Die effektive Länge dieses Interferometerarms ist dann gemäß Ref. 57

$$L_x = L + \Delta L_x = L \left(1 + \frac{1}{2} h \sin \Omega t \right), \quad (1.4a)$$

wobei h die Amplitude und Ω die Frequenz der Gravitationswelle bezeichnen. Dasselbe gilt auch für den zweiten Interferometerarm. Aus Gründen, auf die wir hier nicht näher eingehen wollen, tritt jedoch eine Phasenverschiebung von 180° *** zwischen den Schwingungen der beiden Arme auf, d.h.

$$L_y = L - \Delta L_y = L \left(1 - \frac{1}{2} h \sin \Omega t \right), \quad (1.4b)$$

Die in einem solchen Interferometer gemessene Intensität ist durch⁶¹

$$I = \frac{1}{2} I_0 (1 + \cos \delta)$$

gegeben, wobei I_0 die einfallende Intensität des Lichts und δ die Phasendifferenz

$$\delta = \frac{\Delta L}{\lambda}$$

bezeichnen. Die Größe ΔL ist die Weglängendifferenz und $\lambda \equiv \frac{\lambda}{2\pi}$ die reduzierte Wellenlänge. Im Fall einer Gravitationswelle ist diese Phasendifferenz δ gemäß den Gln. (1.4a) und (1.4b) durch

$$\delta = \frac{hL}{\lambda} \sin \Omega t$$

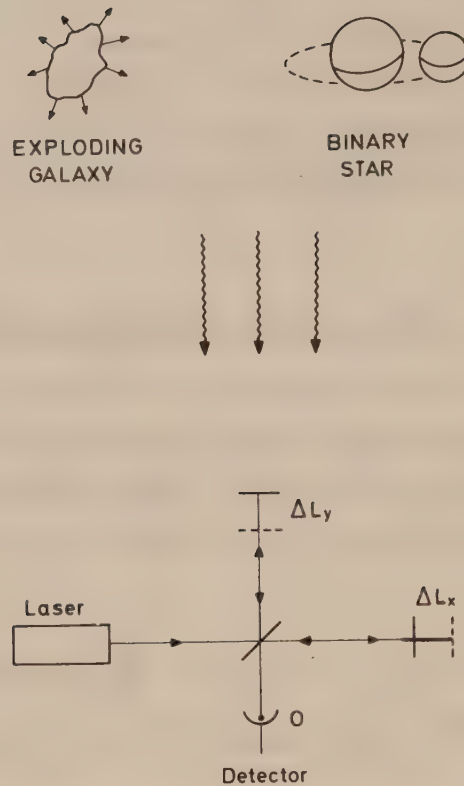
* Wir benutzen dabei ein Fermi-Normal-Koordinatensystem⁶⁰, in dem der Strahlteiler ruht.

** In dem schon wiederholt benutzten Bild des Gravitationsfeldes als dielektrisches Medium entspricht dies einem zeitlich veränderlichen, richtungsabhängigen Brechungsindex.

*** Gravitationswellen sind nichtstationäre Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen der Form

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h \begin{bmatrix} 0 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \exp[i(\Omega t - Kz)],$$

Die unterschiedlichen Vorzeichen in $h_{\mu\nu}$ sind die Ursache für die Phasenverschiebung.



Figur 2: Gravitationswellen von einer explodierenden Galaxie oder einem Zweisternsystem fallen senkrecht zur Ebene eines Michelson-Interferometers ein. Dabei wird ein Arm des Interferometers verlängert, während der andere verkürzt wird.

gegeben und damit folgt

$$I = \frac{1}{2} I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{hL}{\lambda} \sin \Omega t \right) \right) ,$$

Somit kann aus der Messung der zeitlichen Änderung der Intensität auf die Anwesenheit einer Gravitationswelle geschlossen werden.

Dabei ist klarerweise die Größe des Faktors $\Lambda \equiv \frac{hL}{\lambda}$ das Problem. Für eine vermutlich typische Gravitationswelle mit einer Schwingungsamplitude von $h \sim 10^{-20}$ und Laser-Licht mit der Wellenlänge $\lambda \sim 10^{-6}$ m finden

wir bei einer Resonatorlänge von 100 m für den Faktor $\Lambda \sim 10^{-12}$, so-daß die Zeitabhängigkeit der Intensität nicht meßbar ist. Für eine Vergrößerung von Λ bieten sich der Übergang zu kürzeren Wellenlängen und die Verlängerung der Resonatorarme an. Um möglichst lange Lichtwege zu erhalten, werden auch Interferometer mit Vielfachreflektionen benutzt. Dabei darf es jedoch zu keiner Kopplung der einzelnen Strahlengänge durch Rückstreuung an den Spiegeln kommen. Ein weiteres Problem stellt das Schrotrauschen in den Detektoren zur Messung der Intensität dar. Diese Probleme werden zur Zeit an Interferometern studiert, die Gravitationswellen mit einer Schwingungsamplitude von $h \sim 10^{-16}$ in einem Frequenzbereich von einem Kilo Hertz nachweisen könnten. Jedoch wurde bisher noch keine Welle beobachtet⁵⁹.

1.5 Der parametrisierte Nach-Newtonsche Formalismus (Parametrized-Post-Newtonian (PPN) Formalism)

Das Ziel von Experimenten zur Gravitation ist also, die offenen Fragen der "magnetischen Gravitation" und die Existenz der Gravitationswellen zu klären, aber auch neue Tests der Einsteinschen Theorie gegen alternative Theorien durchzuführen. Die einfachsten Theorien der Schwerkraft sind die metrischen Theorien, d.h. Theorien, die die Raum-Zeit über eine Metrik beschreiben. Außerdem müssen in "kleinen" Bereichen der Raum-Zeit, d.h. lokal, die Gesetze der speziellen Relativitätstheorie gelten. Diese Forderung verringert bereits die Zahl der alternativen Gravitationstheorien. Die verbliebenen Theorien, wie z.B. die von Brans-Dicke Jordan oder die Ni Kosmologie, stimmen innerhalb der Fehlergrenzen mit den Ergebnissen der drei klassischen Tests überein⁹. Soll daher in einem bestimmten Experiment die Einsteinsche Theorie gegen andere getestet werden, so muß die entsprechende Rechnung in allen in Frage kommenden Theorien gesondert durchgeführt werden. Dies ist jedoch nach C. Will und K. Nordtvedt⁶² nicht notwendig. Der von ihnen entwickelte, sogenannte parametrisierte Nach-Newtonsche Formalismus (parametrized-post-Newtonian formalism-kurz PPN-Formalismus^{47,62} genannt) erlaubt es, die Rechnung für ein bestimmtes Experiment nur einmal und dann in dieser "Theorie der Theorien" auszuführen. Auf diesen Formalismus wollen wir im Weiteren kurz eingehen, da er den theoretischen Hintergrund für viele Tests der allgemeinen Relativitätstheorie darstellt.

So verschieden die einzelnen metrischen Theorien auch sein mögen, in einem Punkt stimmen sie alle überein. Es existieren Feldgleichungen, die die Metrik der Raum-Zeit festlegen. Diese haben jedoch in jeder Theorie eine andere Form. Zur deren Lösung versucht man in der Regel einen Ansatz der Art

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

wobei man annimmt, daß die Gravitationsfelder so schwach sind, daß sich die Metrik $g_{\mu\nu}$ nur wenig von der der ebenen Raum-Zeit unterscheidet, d.h. für die Korrektur $h_{\mu\nu}$ soll die Beziehung $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ gelten. Diese Schwachfeld-Näherung ist für Experimente in unserem Sonnensystem (leider) gut erfüllt. Mit diesem störungstheoretischen Ansatz findet man nach Voraussetzung in nullter Näherung für alle metrischen Theorien die spezielle Relativitätstheorie und in erster Näherung die Newtonsche Gravitation. Die nächsthöhere Korrektur, die als Nach-Newtonsche (Post-Newtonian) Korrektur bezeichnet wird, ist in jeder metrischen Theorie verschieden. Durch Einführung von 10 Parametern, den sogenannten PPN Parametern, lassen sich diese Korrekturen auf eine gemeinsame Form bringen.

Dies soll am Beispiel der Lense-Thirring Metrik⁶³ verdeutlicht werden, die hier ohne Ableitung⁴ angegeben wird. Diese Metrik wird durch eine mit Drehimpuls S_z um die z-Achse rotierende Vollkugel der Masse M erzeugt und lautet im PPN Formalismus

$$g_{00} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}$$

$$g_{01} = -\frac{1}{8}(7\Delta_1 + \Delta_2) \frac{2G\delta_2}{c^3} \frac{\gamma}{r^3}; g_{02} = \frac{1}{8}(7\Delta_1 + \Delta_2) \frac{2G\delta_2}{c^3} \frac{x}{r^3}; g_{03} = 0 \quad (1.5)$$

$$g_{ij} = -\delta_{ij} \left(1 + \gamma \frac{2GM}{c^2 r} \right)$$

wobei wir die Notation $x^0 = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$ verwenden. Die räumlichen Koordinaten x, y, z sind Koordinaten in einem kartesischen System mit Ursprung im Zentrum der Vollkugel. Die Werte der auftretenden PPN Parameter γ, Δ_1 und Δ_2 in verschiedenen Theorien sind in Tabelle 1 zusammengefaßt⁴⁷. Aus diesem Beispiel ist auch deren physikalische Bedeutung nahegelegt. So stellen wir fest, daß der Parameter γ

die Abweichung der Metrik vom ebenen Raum angibt. Er mißt also in gewissem Sinn die Raumkrümmung und wird daher als Raumkrümmungsparameter bezeichnet. Bezüglich der Bedeutung der Parameter Δ_1 und Δ_2 werden wir im Abschnitt 3.4 und 3.5 die Wirkung der "magnetischen Gravitation" untersuchen. Wir werden feststellen, daß dadurch Inertialsysteme "mitgeführt" oder "mitgenommen" werden. Außerdem werden wir sehen, daß die magnetische Gravitation eng mit den Nebendiagonalelementen der Metrik g_{0j} verknüpft ist. In diesen tauchen, wie aus dem Beispiel (1.5) ersichtlich, die PPN Parameter Δ_1 und Δ_2 auf. Diese geben somit an, inwieweit ein Inertialsystem durch bewegte (rotierende) Massen beeinflusst wird. Sie werden daher oft auch als Mitnahme-Parameter bezeichnet. Läßt man Gravitationstheorien zu, die, wie die Ni Kosmologie, von einem bevorzugten Bezugssystem ausgehen, so enthält Gl. (1.5) noch den "Ätherparameter" α_1 .

Theory Parameter	Einstein	Brans-Dicke Jordan	Ni
γ	1	$\frac{1 + \omega}{2 + \omega}$	1
Δ_1	1	$\frac{10 + 7\omega}{14 + 7\omega}$	$-\frac{1}{7}$
Δ_2	1	1	1
$\alpha_1 =$ $7\Delta_1 + \Delta_2 - 4(\gamma + 1)$	0	0	-8

Tabelle 1: PPN Parameter in verschiedenen metrischen Gravitationstheorien.

Dieser gibt somit an, in welchem Ausmaß ausgezeichnete Bezugssysteme eine Rolle spielen. Da in der Theorie von Einstein die Äquivalenz aller

Koordinatensysteme gilt, muß daher $\alpha_1 = 0$ sein, während α_1 in der Ni Kosmologie einen von Null verschieden Wert hat.

Das Ziel von Experimenten zur Relativitätstheorie ist es somit, diese Parameter so genau wie möglich zu bestimmen, um so, die einzelnen Theorien gegeneinander zu testen.

II. Gravitations-Licht-Wechselwirkung

2.1 Einleitung und Überblick über Kapitel II

Die im Kapitel I diskutierten Anwendungen des Lasers zur Synchronisation von (Cäsium)-Uhren, zu Laufzeitmessungen zum Mond oder zum Nachweis von Schwerewellen haben die Bedeutung des Lasers bei Tests der allgemeinen Relativitätstheorie deutlich gemacht. Dies hat uns veranlaßt, die Ausbreitung von Lichtwellen in einem Gravitationsfeld⁶⁴ vom Standpunkt der Wellenoptik neu zu formulieren.

Die älteste Arbeit zu diesem Thema dürfte wohl diejenige von Soldner⁶⁵ aus dem Jahre 1801 sein, in der er die Ablenkung eines Lichtteilchens mit endlicher Masse im Gravitationsfeld der Sonne mittels der Newtonschen Bewegungsgleichung ableitet. Später wurde dieser Effekt von Einstein im Rahmen seiner allgemeinen Relativitätstheorie erneut aufgegriffen. Sein Resultat jedoch unterschied sich von dem Soldnerschen um einen Faktor 2*. Es konnte im Jahre 1919 experimentell verifiziert werden und galt als Triumph der damals noch jungen allgemeinen Relativitätstheorie. Seit dieser Zeit wurden viele Effekte der Gravitations-Licht-Wechselwirkung untersucht, wie z.B. die Änderung der Polarisierung und der Ausbreitungsrichtung einer Lichtwelle^{17,19,20} im Gravitationsfeld einer schweren, rotierenden Masse. Sogar so exotisch erscheinende Vorgänge wie Verstärkung von Lichtwellen durch Streuung an rotierenden schwarzen Löchern wurden eingehend diskutiert⁶⁷. Bei dieser Art von "stimulierter Emission" wirkt das schwarze Loch in gewissem Sinne als Lasermedium. Eine Licht-Licht Wechselwirkung, wie sie in der Quantenelektrodynamik⁶⁸ zum erstenmal untersucht wurde, tritt auch in der allgemeinen Relativitätstheorie auf. Jeder Laserstrahl oder Laserpuls hoher Energie** verursacht nämlich ein Gravitationsfeld. Ein schwacher

* In seiner ersten Arbeit über die "Trägheit von Licht"⁶⁶ fand Einstein zunächst Soldners Ablenkwinkel, da er einen flachen 3-Raum annahm.

** In der Arbeit von Tolman, Ehrenfest und Podolsky⁶⁹ aus dem Jahr 1931 ist natürlich noch nicht von einem Laser die Rede. Die Autoren sprechen von einem "dünnen Bleistift voll Licht" (engl. "thin pencil of light"), was aus heutiger Sicht zweifelsohne einem Laserstrahl entspricht.

Testpuls, der sich in diesem Gravitationsfeld ausbreitet, erfährt eine Ablenkung^{69,70}. Diese liegt jedoch weit außerhalb der experimentellen Nachweismöglichkeiten. Der Austausch von Energie zwischen einer elektromagnetischen Welle und einer Gravitationswelle wurde in Ref. 71 diskutiert. Dieser Vorgang weist große Analogien zum parametrischen Oszillator in der Quantenoptik auf.

Bisher wurde jeder dieser Effekte getrennt für sich entweder aus den Maxwell-Gleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie oder aus der relativistischen Verallgemeinerung der Newtonschen Bewegungsgleichung, der sogenannten Geodätengleichung, berechnet. In dieser Arbeit werden wir zeigen, daß sich viele der oben angesprochenen Effekte aus einer einzigen Gleichung, aus einer Wellengleichung, ableiten lassen. Diese Wellengleichung beschreibt die Ausbreitung eines Probesignals in einem gegebenen schwachen, zeitunabhängigen Gravitationsfeld.*

Zu deren Ableitung müssen wir von den im Abschnitt 2.2 erläuterten allgemein relativistischen Maxwell-Gleichungen⁴ ausgehen, in denen kovariante Ableitungen und Christoffel-Symbole auftreten. In diesem Formalismus ist es aufwendig, eine Wellengleichung für das elektrische Feld abzuleiten. Einer Notation von Plebanski¹⁷ folgend, bringen wir deshalb diese Gleichungen auf eine Form, die an die Maxwell-Gleichungen in einem Medium erinnert: Danach wirkt das Gravitationsfeld wie ein dielektrisches Medium. Davon ausgehend ist es nicht schwer mit den bekannten Techniken aus der klassischen Elektrodynamik eine Wellengleichung für das elektrische Feld zu erhalten. Dies werden wir im Abschnitt 2.3 für ein schwaches, zeitunabhängiges Gravitationsfeld, das im PPN-Formalismus beschrieben wird, durchführen.

* Der hier entwickelte Formalismus läßt sich auch auf den Fall eines zeitabhängigen Gravitationsfeldes anwenden. Die dabei entstehende Wellengleichung ist jedoch wesentlich komplizierter als Gl. (2.17).

2.2 Gravitationsfeld als dielektrisches Medium

Jede Form von Energie und wegen der Äquivalenz von Masse und Energie natürlich auch jede Art von Masse führt zu einer Krümmung der Raum-Zeit. Daher ist diese nicht mehr eben* und läßt sich nicht mehr global durch die Metrik der flachen Raum-Zeit

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

beschreiben. Somit genügen zur Beschreibung der Lichtausbreitung in einem Gravitationsfeld nicht die speziell relativistischen Maxwell-Gleichungen, sondern wir müssen deren Darstellung in beliebigen krummlinigen Koordinaten x^μ heranziehen. Die Metrik $g_{\mu\nu}$ dieses Raumes ist über die Einsteinschen Feldgleichungen durch die Energie (Massen)-Impulsverteilung festgelegt.

Die Form der allgemein relativistischen Maxwell-Gleichungen läßt sich auf verschiedene Arten motivieren, auf die wir hier jedoch nicht näher eingehen wollen. Wie in Ref. 4 erläutert, lauten sie

$$F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\beta\gamma,\alpha} + F_{\gamma\alpha,\beta} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} F^{\mu\nu})_{,\nu} = -\mu_0 J^\mu, \quad (2.2)$$

wobei ein Komma vor dem Index die (gewöhnliche) partielle Differentiation nach der entsprechenden Koordinate bedeutet und wobei wir die Abkürzung $g \equiv \det g_{\mu\nu}$ eingeführt haben. Die Komponenten des Feldstärke-Tensors sind mit $F_{\mu\nu}$ und die des Viererstroms mit J^μ bezeichnet. Das Symbol μ_0 bezeichnet die magnetische Permeabilität des Vakuums.

Es ist ein recht umständliches Verfahren, aus Gl. (2.1) und (2.2) eine Wellengleichung für das elektrische Feld $\vec{E}$ abzuleiten; und zwar deshalb,

* Unter dem Begriff eben verstehen wir, daß alle Komponenten des Riemannschen Krümmungstensors verschwinden.

weil Gl. (2.1) nur rein kovariante Komponenten des Feldstärke-Tensors enthält, während in Gl. (2.2) die kontravarianten Komponenten auftreten. Die kovarianten Komponenten hängen über die Beziehung

$$F^{\mu\nu} = g^{\mu\rho} F_{\rho\sigma} g^{\sigma\nu}$$

mit den kontravarianten zusammen. Benutzen wir also nur kovariante Komponenten, so nimmt (Gl. 2.2) die Form

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} g^{\mu\rho} F_{\rho\sigma} g^{\sigma\nu})_{,\nu} = -\mu_0 j^\mu \quad (2.3)$$

an. Da die metrischen Koeffizienten $g^{\mu\nu}$ Funktionen der Koordinaten x^μ sind, ergibt die Differentiation nach x^μ eine "Flut" von Beiträgen. Um eine Wellengleichung für $\vec{E}$ zu finden, muß Gl. (2.3) nochmals differenziert werden. Man erkennt sehr leicht, daß dieses Vorgehen, von wenigen Spezialfällen⁶⁹ abgesehen, zu "Chaos" führen muß. Daher werden wir einen anderen Weg einschlagen.

Schon bald nach der Entwicklung der allgemeinen Relativitätstheorie gelang es Tamm¹⁷, die Gleichungen (2.1) und (2.2) so umzuschreiben, daß sie an die Maxwell-Gleichungen in einem Medium erinnern. Dabei werden zusätzlich zu den $\vec{E}$ und $\vec{B}$ Feldern noch $\vec{D}$ und $\vec{H}$ Felder eingeführt. Diese sind jedoch nicht unabhängig, sondern hängen wie in der Elektrodynamik über "Materialgleichungen" zusammen. Die Komponenten des "dielektrischen Suszeptibilitätstensors" sind dabei bestimmte Kombinationen der metrischen Fundamentalkoeffizienten $g_{\mu\nu}$. Es sei ausdrücklich betont, daß kein physikalisches dielektrisches Medium vorhanden ist, sondern daß das Gravitationsfeld nur als ein solches interpretiert werden kann.

Zu dieser Umschreibung gibt es mehrere Möglichkeiten. Landau und Lifschitz⁷² berücksichtigen die Metrik $g_{\mu\nu}$ zum Teil in "Materialgleichungen" und zum Teil in dem Differentialoperator $\vec{\nabla}$. Dadurch wird allerdings das Rechnen mit diesen Operatoren erheblich erschwert. In der Notation von Plebanski¹⁷ dagegen wird der gesamte Einfluß der Metrik in den "Materialgleichungen" berücksichtigt und die Differentialoperatoren werden wie in kartesischen Koordinaten behandelt. Dieser Notation werden wir uns anschließen.

Zunächst führen wir über die Beziehung¹⁷

$$\frac{1}{c} E_j \equiv F_{0j} \quad D_j \equiv -c \sqrt{-g} F^{0j} \quad (2.4)$$

$$B_j \equiv -\frac{1}{2} \varepsilon_{jrm} F_{rm} \quad H_j \equiv -\frac{1}{2} \varepsilon_{jrm} \sqrt{-g} F^{rm} \quad (2.5)$$

die neuen Felder $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{B}$ und $\vec{H}$ ein, wobei ε_{jrm} das vollständig antisymmetrische Levi-Civita Symbol* bezeichnet und Summation über doppelt vorkommende lateinische Indizes $j, r, m = 1, 2, 3$ impliziert ist. Diese Vektorfelder sind jedoch nicht voneinander unabhängig. Aus den Beziehungen

$$F_{0j} = g_{0\rho} F^{\rho\sigma} g_{\sigma j}$$

und

$$F^{kj} = g^{kp} F_{\rho\nu} g^{\nu j}$$

leitet man die folgenden "Materialgleichungen" ab**

$$D_j = \varepsilon^{js} E_s + c (\vec{H} \times \vec{g})_j \quad (2.6)$$

$$B_j = \mu^{js} H_s + \frac{1}{c} (\vec{g} \times \vec{E})_j \quad (2.7)$$

Dabei haben wir

$$\varepsilon^{js} = \mu^{js} = - \frac{\sqrt{-g}}{g_{00}} g^{js} \quad (2.8)$$

und die Abkürzung

$$(\vec{g})_j \equiv - \frac{g_{0j}}{g_{00}} \quad (2.9)$$

eingeführt. Das Vektorprodukt sei wie üblich durch

$$(\vec{g} \times \vec{H})_j \equiv \varepsilon_{jkr} g_k H_r$$

definiert.

* $\varepsilon_{jrm} = \begin{cases} +1 & \text{falls } jrm \text{ eine gerade Permutation von } (123) \\ 0 & \text{wenn mindestens zwei Indizes gleich sind} \\ -1 & \text{falls } jrm \text{ eine ungerade Permutation von } (123) \end{cases}$

** Eine detaillierte Ableitung dieser Gleichungen findet sich in Ref. 4.

Die Gln. (2.6) und (2.7) zeigen große Verwandtschaft mit den Materialgleichungen der Elektrodynamik in Medien. Das Gravitationsfeld wirkt also wie ein effektives Medium. Um dies an einem einfachen Beispiel zu verdeutlichen, betrachten wir Gln. (2.6) und (2.7) für den Fall eines schwachen Gravitationsfeldes in isotroper Eichung

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

mit

$$\text{und } g_{00} = 1 + h_{00} \quad g_{ij} = -\delta_{ij}(1 - h_{00}) \quad h_{0i} = 0$$

$$|h_{\mu\nu}| \ll 1.$$

Unter Berücksichtigung der Beziehung

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \eta^{\mu\rho} h_{\rho\sigma} \eta^{\sigma\nu}, \quad (2.10)$$

die sich leicht durch Bildung von

$$g_{\lambda\mu} g^{\mu\nu} = (g_{\lambda\mu} + h_{\lambda\mu})(\eta^{\mu\nu} - \eta^{\mu\rho} h_{\rho\sigma} \eta^{\sigma\nu}) = \delta_{\lambda}^{\nu} + o(h^2)$$

überprüfen läßt, finden wir aus Gl. (2.8)

$$-\frac{\sqrt{-g}}{g_{00}} g^{js} = \delta^{js}(1 - h_{00})$$

und daher die Materialgleichungen

$$\vec{D} = (1 - h_{00}) \vec{E}$$

$$\vec{B} = (1 - h_{00}) \vec{H}.$$

Ein statisches Gravitationsfeld ist somit in seiner Wirkung einem dielektrischen Medium mit dielektrischer und magnetischer Permeabilität

$$\varepsilon = \mu = 1 - h_{00}$$

gleich. In der speziellen Relativitätstheorie gilt $h_{\mu\nu} = 0$ und daher reduzieren sich die Gln. (2.6) und (2.7) auf

$$\vec{D} = \vec{E} \quad \text{und} \quad \vec{B} = \vec{H}$$

d.h. auf das "Vakuum".

Neben dieser "dielektrischen" Kopplung zwischen $\vec{D}$ und $\vec{E}$ sowie $\vec{H}$ und $\vec{B}$ finden wir nach Gl. (2.6) und (2.7) noch eine Kopplung zwischen $\vec{D}$ und $\vec{H}$, die von den Raum-Zeit-Komponenten der Metrik g_{0j} abhängt. Diese wird im Kapitel III zu interessanten Gravitations-Licht-Effekten, z.B. zum Mitnahme-Effekt oder zum Sagnac-Effekt, führen. Eine analoge Kopplung findet sich gemäß Gl. (2.7) auch zwischen $\vec{B}$ und $\vec{E}$.

Benutzen wir jetzt die Definitionen (2.4) und (2.5), so können wir die Maxwell-Gleichungen (2.1) und (2.2) in eine neue Form¹⁷

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.11)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.12)$$

überführen, wobei wir die Abkürzungen

$$\rho \equiv \sqrt{-g} \frac{j^0}{c}$$

und

$$j_r \equiv \sqrt{-g} j^r$$

benutzt haben. Die Differentialoperatoren $\vec{\nabla}_x$ und $\vec{\nabla}$ sind wie in kartesischen Koordinaten durch

$$\begin{aligned} \text{und} \quad (\vec{\nabla} \times \vec{a})_i &\equiv \epsilon_{jkr} \frac{\partial a_r}{\partial x^k} \\ (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) &\equiv \frac{\partial a_k}{\partial x^k} \end{aligned}$$

definiert.

Das Gravitationsfeld, d.h. die Metrik tritt nur über die "Materialgleichungen" (2.6) und (2.7) in Erscheinung.

2.3. Ableitung einer Wellengleichung für das elektrische Feld

In diesem Abschnitt werden wir ausgehend von den Maxwell-Gleichungen (2.11) und (2.12) zusammen mit den "Materialgleichungen" (2.6) und (2.7) eine Wellengleichung für das elektrische Feld in einem schwachen, zeitunabhängigen Gravitationsfeld ableiten, das von der Form

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

ist, wobei

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1 + h_{00} & g_{ij} &= -\delta_{ij}(1 - \gamma h_{00}) \\ g_{0i} &= h_{0i} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Das Symbol γ bezeichnet den PPN Krümmungsparameter (siehe Tabelle 1). Die anderen PPN Parameter, wie z.B. die im Abschnitt 1.5 diskutierten Mitnahme-Parameter Δ_1 und Δ_2 , sind in dem Vektor

$$(\vec{h})_i \equiv h_{0i}$$

enthalten. Eine solche Metrik kann durch eine statische, sphärische Massenverteilung ($\vec{h}=0$) oder eine rotierende Massenkugel ($\vec{h} \neq 0$) erzeugt werden. Lassen wir zu Tests der Relativitätstheorie auch Theorien zu, die, wie die Ni Kosmologie, von bevorzugten Bezugssystemen ausgeht, so enthält $\vec{h}$ auch den PPN Parameter α_1 ⁹.

Unter Benutzung von (2.13) finden wir wegen

$$-\frac{\sqrt{-g}}{g_{00}} g^{ij} = \delta^{ij} (1 - \frac{1}{2}(\gamma+1)h_{00})$$

aus Gl. (2.6) und (2.7)

$$\vec{D} = [1 - \frac{1}{2}(\gamma+1)h_{00}] \vec{E} - c \vec{H} \times \vec{h} \quad (2.14)$$

$$\vec{B} = [1 - \frac{1}{2}(\gamma+1)h_{00}] \vec{H} + \frac{1}{c} \vec{E} \times \vec{h} . \quad (2.15)$$

Dabei haben wir Terme von der Ordnung h^2 vernachlässigt, wobei h eine typische Komponente von $h_{\mu\nu}$ bezeichnet. Außerdem haben wir zu dieser Ableitung die Definition (2.9) und die Beziehung

$$(\vec{g})_i = -\frac{h_{0i}}{1 + h_{00}} \cong -h_{0i} = -(\vec{h})_i$$

benutzt. Aus Gl. (2.15) folgt

$$\vec{B} = \vec{H} + O(h) ,$$

so daß in Gl. (2.14) $\vec{H}$ durch $\vec{B}$ ersetzt werden kann

$$\vec{D} = [1 - \frac{1}{2}(\gamma+1)h_{00}] \vec{E} - c \vec{B} \times \vec{h} . \quad (2.16)$$

Nun sind wir in der Lage analog zur Elektrodynamik eine Wellengleichung abzuleiten. Wir bilden $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E})$ und benutzen die "Materialgleichungen" (2.15) und (2.16), um so die $\vec{D}$ und $\vec{H}$ Felder aus den ladungs- und strom-freien Maxwell-Gleichungen (2.11) und (2.12) zu eliminieren. Dies ist im Detail im Anhang A beschrieben. Wir finden schließlich die folgende Wellen-gleichung in niedrigster geometrisch-optischer Näherung⁷³

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \vec{E} &= \underbrace{(\gamma+1) h_{00} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}_{\text{Zeitdehnung}} \\ &\quad - \underbrace{\frac{1}{2}(\gamma+1) \{ 2 \vec{\nabla} h_{00} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + (\vec{\nabla} h_{00} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} \}}_{\text{Einsteinsche Lichtablenkung}} \\ &\quad + \underbrace{2 (\vec{\nabla} \times \vec{h}) \times \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + c [(\vec{\nabla} \times \vec{h}) \cdot \vec{\nabla}] \vec{B}}_{\substack{\text{Machsche Lichtablenkung} \\ \text{Gravitations-Faraday-Effekt}}} \quad (2.17) \\ &\quad - \underbrace{2 (\vec{h} \cdot \vec{\nabla}) \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{\text{Sagnac-Effekt}} \end{aligned}$$

Diese Wellengleichung für $\vec{E}$ bestimmt zusammen mit der entsprechenden Gleichung für $\vec{H}$ die Lichtausbreitung in einem schwachen Gravitationsfeld der Form (2.13). (Da die Materialgleichungen (2.6) (2.7) und die Maxwell Gleichungen (2.11) und (2.12) invariant unter der Substitution

$$(\vec{B}, \vec{D}, \vec{E}, \vec{H}) \rightarrow (-\vec{D}, \vec{B}, \vec{H}, -\vec{E})$$

bleiben, finden wir aus Gl. (2.17) durch Ersetzen von $\vec{E}$ durch $\vec{H}$ und $\vec{B}$ durch $-\vec{D}$ eine Wellengleichung für $\vec{H}$.)

Ein jeder der "Polarisationsterme" auf der rechten Seite von Gl. (2.17) wird, wie wir im Kapitel III zeigen werden, zu bestimmten Effekten in der Gravitations-Licht Wechselwirkung führen, die bereits in Gl. (2.17) angedeutet sind.

Abschließend halten wir fest, daß wir bei der Ableitung der obigen Wellengleichung

1. zeitunabhängige Gravitationsfelder vorausgesetzt haben. Eine Verallgemeinerung auf zeitabhängige Felder ist möglich, soll aber hier nicht behandelt werden.
2. nur in $h_{\mu\nu}$ lineare Terme berücksichtigt haben,
3. die sogenannte de Donder oder Hilbert Eichbedingung⁸

$$(h^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} h^{\rho}_{\rho}),_{\nu} = 0$$

benutzt haben,

4. von der Annahme ausgingen, daß wir die elektromagnetische Welle nur außerhalb der Massenverteilung beschreiben werden.
5. die Gravitationsfelder als langsam variierend auf der Skala der Wellenlänge des Lichts betrachtet haben.⁷³

Aus dem Anhang A ist ersichtlich, an welcher Stelle der Rechnung diese Annahmen eingehen.

III. Gravito-Optische Effekte

3.1 Einleitung und Überblick über Kapitel III

Im letzten Kapitel haben wir Wellengleichungen für $\vec{E}$ und $\vec{H}$ abgeleitet, die die Ausbreitung eines elektromagnetischen Probesignals* in einem schwachen, zeitunabhängigen Gravitationsfeld beschreibt. Ein solches Gravitationsfeld wird beispielsweise durch die Sonne oder die rotierende Erde erzeugt. Ausgehend von dieser Wellengleichung werden wir jetzt Probleme der Ausbreitung von elektromagnetischer Strahlung, insbesondere die Änderung der Ausbreitungsrichtung, der Polarisierung oder der Frequenz der Lichtwelle untersuchen. Dazu diskutieren wir in diesem Kapitel systematisch den Einfluß eines jeden der Antriebsterme auf der rechten Seite von Gl. (2.17).

Wir beginnen im Abschnitt 3.2 mit der Diskussion von Radar-Laufzeit-Experimenten^{18,74}. Dabei wird die Laufzeit von von der Erde ausgesandten und von einem Planeten wie z.B. dem Merkur oder der Venus reflektierten Mikrowellen bestimmt. Man vergleicht die Messungen für den Fall, daß die Sonne nahe der Verbindungsachse Erde-Planet steht mit dem Fall, daß die Sonne weit entfernt ist. Im ersten Fall breitet sich, die Welle im Gravitationsfeld der Sonne aus. Die beiden Laufzeiten, auf gleiche Entfernung korrigiert, unterscheiden sich etwa um 10^{-4} sec. Dieser Effekt läßt sich leicht aus der im Abschnitt 2.2 behandelten Analogie Gravitationsfeld-dielektrisches Medium verstehen: Das Gravitationsfeld induziert einen effektiven Brechungsindex und führt so zu einer Änderung der Ausbreitungsgeschwindigkeit. Dieser Effekt wurde 1968 von Shapiro^{18,74} und Anderson und deren Mitarbeitern gemessen und gilt momentan als die genaueste Methode zur Bestimmung des PPN Raumkrümmungsparameters γ .

In der Optik verursacht jeder ortsabhängige Brechungsindex eine Änderung der Ausbreitungsrichtung des Lichts. Aus der Analogie Gravitationsfeld-dielektrisches Medium muß dies auch für Lichtausbreitung in einem Gravitationsfeld gelten. Im Abschnitt 3.3 leiten wir die bekannte Einsteinsche Lichtablenkung aus der Wellengleichung (2.17) ab und finden für den Ablenkwinkel eine Summe aus zwei gleich großen Beiträgen. Der erste Term

* Unter einem Probesignal verstehen wir ein Lichtsignal dessen Intensität so schwach ist, daß es zu keiner Raum-Zeit Krümmung führt.

rührt vom Newtonschen Potential her, ist also kein allgemein relativistischer Effekt, während der zweite, da er proportional zum Raumkrümmungsparameter γ ist, eine allgemein relativistische Korrektur darstellt. Wie im letzten Kapitel bereits erwähnt, wurde schon im Jahre 1801 von Soldner⁶⁵ die Lichtablenkung im Gravitationsfeld der Sonne betrachtet, aber nur der Newtonsche Beitrag abgeleitet. Dasselbe Resultat wurde auch von Einstein⁶⁶ in seiner ersten Arbeit hierüber im Jahre 1914 angegeben. Dieser Winkel ist jedoch halb so groß als das exakte, allgemein relativistische Ergebnis.

In seinem Buch "Die Mechanik", stellte Mach⁷⁵ der seit Newton üblichen Anschauung, nur Beschleunigungen seien absolut, eine neue, revolutionäre Theorie gegenüber. Demnach sind auch Beschleunigungen nur relativ. Als Bezugspunkt wählte Mach die Fixsterne*. Für das bekannte Newtonsche Gedanken-Experiment mit Wasser in einem rotierenden Eimer darf sich somit kein Unterschied ergeben, ob der Eimer relativ zu den Sternen rotiert, oder die Sterne relativ zum Eimer: in beiden Fällen müssen Trägheitskräfte auftreten. In gewissem Sinne ist somit ein rotierendes System einem von bewegten Massen erzeugten Gravitationsfeld ähnlich. Die dabei auftretenden Felder werden nach ihren Entdeckern, Lense-Thirring Felder genannt und die von solchen Feldern herrührenden Effekte werden als "Mitzieh-" oder "Mitnahme-" Effekte bezeichnet. Deren Einflüsse auf die Lichtausbreitung werden im Abschnitt 3.4 behandelt.

Im Abschnitt 3.4.2 untersuchen wir nochmals die Lichtablenkung im Gravitationsfeld der Sonne, jetzt aber unter Berücksichtigung der Rotation der Sonne. Wir finden dabei einen zusätzlichen Ablenkwinkel, der zum erstenmal von Plebanski¹⁷ diskutiert wurde. Auf Grund der "Äquivalenz" zwischen einem rotierenden System und einem von bewegten Massen hervorgerufenen Gravitationsfeld, läßt sich dieser Effekt leicht verstehen: Ein rotierender Beobachter nimmt einen geraden Lichtstrahl als gekrümmt wahr.

Ein weiterer Mitnahmeeffekt ist die Änderung der Polarisationsrichtung^{17,20}

* Eine genauere Diskussion des sogenannten Machschen Prinzips findet sich in Ref. 76 und den dort zitierten Arbeiten.

des Lichtes. Dieser, dem Faraday-Effekt ähnliche Effekt, wurde zum erstenmal von Skrotskii¹⁹ und Balazs²⁰ diskutiert. Deren Ergebnisse wurden von Plebanski¹⁷ korrigiert. Wir werden diese Effekte im Abschnitt 5.4.3 aus unserer Wellengleichung (2.17) ableiten. Beide Effekte würden im Prinzip Aufschlüsse über die PPN Parameter Δ_1 , Δ_2 geben; jedoch sind sie so klein, daß sie mit heutiger Meßtechnik noch nicht gemessen werden können.

Im Zusammenhang mit Tests der Äthertheorie unternahm Sagnac²¹ im Jahre 1913 einen Versuch mit einem rotierenden ringförmigen Interferometer. Ein von einer Lichtquelle ausgesandter Strahl wird dabei über einen Strahlteiler in einen Ringresonator eingekoppelt. Dadurch erhält man zwei gegenläufige Wellen, die nach einem Umlauf ausgekoppelt und wieder vereinigt werden. Bei Rotation des Interferometers um eine Achse senkrecht zu seiner Ebene ist wegen der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit die Laufzeit in Drehrichtung etwas länger als in entgegengesetzter Richtung. Hieraus ergibt sich eine Phasenverschiebung, die, wie sich herausstellt, proportional zur Rotationsfrequenz ist. Benutzt man ein Interferometer, dessen Lichtquelle innerhalb des Resonators ist, so ergibt sich eine zur Rotationsrate proportionale Frequenzverschiebung. Diesen Effekt, der in seiner technischen Anwendung zur Entwicklung von optischen Gyroskopen, den sogenannten Ring-Laser-Gyroskopen²⁴, geführt hat, bezeichnet man nach seinem Entdecker Sagnac-Effekt. Er ist (in dieser Form) kein allgemein relativistischer Effekt, da er nicht von der Anwesenheit von schweren Massen abhängt. Berechnen wir jedoch die Frequenzverschiebung in einem rotierenden Ring-Laser auf der Erde, unter Benutzung der allgemeinen Relativitätstheorie und bei Berücksichtigung der Eigenrotation der Erde, so finden wir neben den klassischen Sagnac-Frequenztermen zusätzliche Frequenzverschiebungen, die von Raumkrümmung, Anwesenheit von bevorzugten Bezugssystemen und vom Lense-Thirring Feld herrühren. Diese Effekte sind allgemein relativistische Effekte und können zu Tests verschiedener PPN Parameter benutzt werden.

Diese Verallgemeinerung des Sagnac-Effektes wurde zum erstenmal von Scully in Ref. 22 angesprochen und in Ref. 23 ausführlich diskutiert. Im Abschnitt 3.5 werden wir diesen verallgemeinerten Sagnac-Effekt behandeln. Dazu werden wir in 3.5.1 ausgehend von der Wellengleichung (2.17) eine Ableitung der Sagnac-Frequenzverschiebung in Anwesenheit

eines Gravitationsfeldes geben und sodann in Abschnitt 3.5.2 die Verbindung mit dem klassischen Sagnac-Effekt herstellen. Abschließend diskutieren wir in Abschnitt 3.5.3 die für ein auf der Erde ausgeführtes Ring-Laser Experiment auftretenden allgemein relativistischen Frequenzkorrekturen, wobei wir zu deren Erklärung eine Analogie zwischen den Einsteinschen Feldgleichungen in der Schwachfeld-Näherung und den Maxwell-Gleichungen benutzen¹.

3.2. Radar-Laufzeit Experimente

Aus dem ersten Antriebsterm von Gl. (2.17) folgt der sogenannte "Zeitdehnungseffekt" oder Zeitdilatationseffekt. Dabei wird, wie in Fig. 3 gezeigt, ein Radiosignal von der Erde ($y_{\oplus} < 0$ bezeichnet die Erdposition) zu einem Planeten bei $y_p > 0$ gesandt und dort reflektiert. Diese Lichtausbreitung geschieht im Gravitationsfeld der Sonne, die wir im Ursprung des gewählten Koordinatensystems annehmen. Die Laufzeit des Lichts oder des Radio-Signals zwischen $y_{\oplus}$ und y_p folgt dann aus der Beziehung

$$\frac{dy}{dt} = c_g \quad (3.1)$$

wobei c_g die effektive Lichtgeschwindigkeit in einem Gravitationsfeld bezeichnet. Diese kann leicht aus der Wellengleichung (2.17)

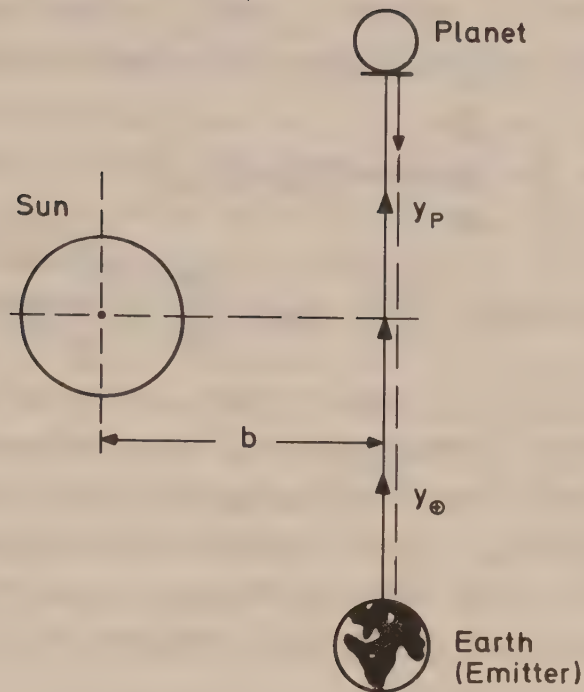
$$\square^2 \vec{E} = (\gamma+1) h_{00} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

bestimmt werden, indem wir den d'Alembert Operator in seine Raum- und Zeitkomponenten aufteilen und mit dem Treibterm zusammenfassen. Damit finden wir

$$\left(1 - (\gamma+1) h_{00}\right) \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \vec{E} = 0. \quad (3.2)$$

Dies zeigt, daß die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts in einem Gravitationsfeld von der Form Gl. (2.13) (wir setzen $\vec{h} = 0$) mit der des masselosen Raumes über die Beziehung

$$\frac{1}{c_g^2} = \frac{1 - (\gamma+1) h_{00}}{c^2} \quad (3.3)$$



Figur 3: Ausbreitung einer von der Erde ausgesandten Radiowelle im Gravitationsfeld der Sonne.

oder

$$c_g = c \left(1 + \frac{1}{2}(\gamma+1)h_{00} \right) \quad (3.4)$$

zusammenhängt, wobei wir im letzten Schritt noch die Tatsache $|h_{00}| \ll 1$ benutzt haben. Da der metrische Fundamentalkoeffizient h_{00} eine Funktion des Ortes ist, hängt über Gl. (3.4) auch die Ausbreitungsgeschwindigkeit c_g davon ab. Aus Gl. (3.4) läßt sich somit dem Gravitationsfeld ein effektiver (ortsabhängiger) Brechungsindex $n_g = \frac{c}{c_g}$ zuschreiben, der von der Form

$$n_g = 1 - \frac{1}{2}(\gamma+1)h_{00} \quad (3.5)$$

ist. In Abschnitt 3.3 werden wir sehen, daß dieses Ergebnis auch auf die sogenannte Einsteinsche Lichtablenkung führt.

In diesem Abschnitt jedoch wollen wir nur die Beziehung (3.4) benutzen, um die Koordinaten Laufzeit Δt zwischen $y_{\oplus}$ und y_p zu berechnen. Dazu setzen wir Gl. (3.4) in Gl. (3.1) ein und finden durch elementare Integration

$$\Delta t = \int_{y_{\oplus}}^{y_p} dy \frac{1}{c g(y)} = \frac{1}{c} \int_{y_{\oplus}}^{y_p} dy \left(1 - \frac{1}{2}(\gamma+1)h_{00} \right)$$

$$= \frac{1}{c}(y_p - y_{\oplus}) + (\gamma+1) \frac{M_{\odot} G}{c^3} \ln \left\{ \frac{y_p + \sqrt{y_p^2 + b^2}}{y_{\oplus} + \sqrt{y_{\oplus}^2 + b^2}} \right\}$$

wobei wir $h_{00} = -\frac{2GM_{\odot}}{c^2 r}$ (Gl. 1.5) benutzt haben. Der erste Beitrag ist offensichtlich die Laufzeit in Abwesenheit der Sonne, während der zweite die durch das Gravitationsfeld verursachte Korrektur bezeichnet. Man kann zeigen, daß diese am größten ist, wenn die Erde und der Planet auf entgegengesetzten Seiten der Sonne stehen (siehe Fig. 3) und die Beziehungen $\frac{b}{y_{\oplus}} \ll 1$ und $\frac{b}{y_p} \ll 1$ gelten. Für diesen Fall reduziert sich die Laufzeit zu

$$\Delta t = \frac{y_p - y_{\oplus}}{c} + (\gamma+1) \frac{M_{\odot} G}{c^3} \ln \left\{ \frac{4 y_p |y_{\oplus}|}{b^2} \right\}$$

Um eine Vorstellung von der Größenordnung des relativistischen Korrekturterms zu bekommen, setzen wir⁸ $b = R_{\odot} = 6.96 \cdot 10^{10}$ cm, ($R_{\odot}$ bezeichnet den Radius der Sonne) und $M_{\odot} = 1.99 \cdot 10^{33}$ g. Für die Positionen der Erde und des Planeten, für den wir den Merkur wählen, benutzen wir die Radien derer Umlaufbahnen: $y_{\oplus} \cong 14.9 \cdot 10^{12}$ cm und $y_p = 5.8 \cdot 10^{12}$ cm.

Der Zeitdehnungseffekt für ein Signal von der Erde zum Merkur ist dann von der Größenordnung*

$$(\gamma+1) (5.5 \cdot 10^{-5}) \text{ sec.}$$

Dieses Experiment erlaubt offenbar eine Messung des PPN Raumkrümmungsparameters γ , der von Einstein's Theorie als 1 vorhergesagt wird. Shapiro^{18,73}, Anderson⁷⁴ und deren Mitarbeiter haben im Zeitraum von 1968-1971 Laufzeitmessungen mit Radiowellen zu den Planeten Merkur und Venus durchgeführt. Diese Experimente, die im Übrigen genauere Werte liefern, als die im weiteren diskutierte Lichtablenkung, erbrachten den Wert

$$\gamma = 1.02 \pm 0.08.$$

* Um vollständig korrekt zu sein, muß diese Zeit noch in der Eigenzeit der Uhr auf der Erde ausgedrückt werden.

3.3 Einsteinsche Lichtablenkung

Im letzten Abschnitt haben wir gezeigt, daß ein Gravitationsfeld einen effektiven Brechungsindex induziert, die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts ändert und damit den Zeitdehnungseffekt verursacht. In der Optik ist mit jeder Änderung des Brechungsindex auch eine Änderung der Ausbreitungsrichtung des Lichtes verbunden. Aus Einstein's grundlegenden Arbeiten von 1907-1915 ist bekannt, daß dies auch auf die Lichtausbreitung im Gravitationsfeld zutrifft. Dabei kann dieser Ablenkwinkel analog dem Verfahren in der Optik aus dem Huygensschen Prinzip und dem Ausdruck für den Brechungsindex (3.5) berechnet werden. In dieser Arbeit jedoch werden wir von der Wellengleichung (2.17) ausgehend den Prozeß erneut studieren. Dazu breite sich eine linear polarisierte ebene elektromagnetische Welle der Kreisfrequenz ω ausgehend vom gravitationsfreien* Raum, d.h. von ebener Raum-Zeit in einem schwachen, zeitunabhängigen Gravitationsfeld der Metrik $g_{\mu\nu}$ aus. Dieses Schwerfeld kann man sich z.B. durch die Sonne erzeugt denken. Nachdem das Lichtsignal wieder den gravitationsfreien Raum erreicht hat, wollen wir für diesen Fall den Ablenkwinkel angeben.

Darüber hinaus werden wir feststellen, daß sich die Amplitude der Welle und damit auch die Energiedichte des Probesignals beim Durchgang durch das Gravitationsfeld ändern. Bei dem obigen Streuprozeß bleibt jedoch, wie wir sehen werden, die Energie erhalten. Eine Verstärkung von Lichtwellen durch Streuung an einem schwachen, zeitunabhängigen Gravitationsfeld ist also wie erwartet nicht möglich. Auf schwarze Löcher, die eine Ergosphäre besitzen, trifft dies nicht zu⁶⁷. Hier ist ein solcher Verstärkungsprozeß möglich, wie wir abschließend im Abschnitt 3.3.3 diskutieren werden.

3.3.1 Lösung der Wellengleichung

Setzen wir in der Wellengleichung (2.17) $\vec{h} = 0$, (dies entspricht, wie wir im Abschnitt 3.4 sehen werden, der Vernachlässigung der Mitnahmeeffekte) und vernachlässigen wir außerdem den im Abschnitt 3.2 diskutierten Zeit-

* Gravitationspotentiale fallen in der Regel (mindestens) wie $\frac{1}{r}$ ab und verschwinden somit exakt nur für den Fall $\vec{r}_0 = \pm\infty$.

dehnungsterm, so lautet die relevante Wellengleichung

$$\square^2 \vec{E} = -\frac{1}{2}(\gamma+1) \{ 2 \vec{\nabla} h_{00} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + (\vec{\nabla} h_{00} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} \} . \quad (3.6)$$

Zur Lösung zerlegen wir das elektrische Feld in die ungestreute Welle $\vec{E}^{(0)}$ und die gestreute $\vec{E}^{(1)}$, die von der Ordnung h ist, wobei die Größe h ein typisches Element der Metrik $h_{\mu\nu}$ bezeichnet.

$$\vec{E} = \vec{E}^{(0)} + \vec{E}^{(1)} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} + \vec{E}^{(1)} . \quad (3.7)$$

Die Randbedingung für $\vec{E}^{(1)}$ im Unendlichen ist dann durch

$$\vec{E}^{(1)}(-\infty) = 0 \quad (3.8)$$

gegeben. Einsetzen in die Wellengleichung und Vernachlässigung von Termen der Ordnung h^2 liefert die folgende Gleichung für das gestreute Feld $\vec{E}^{(1)}$

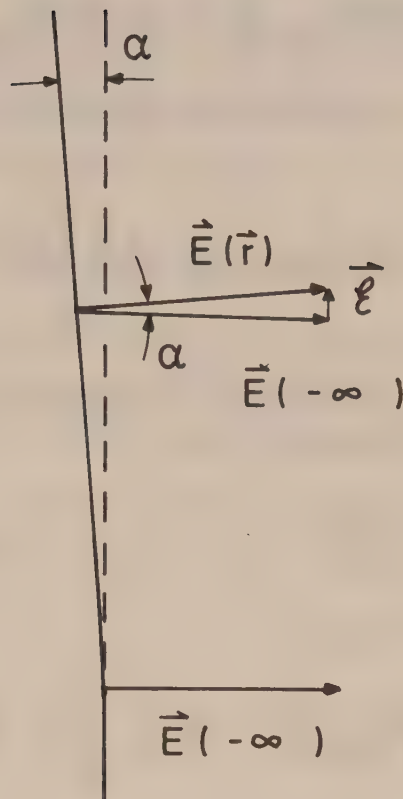
$$\square^2 \vec{E}^{(1)} = \frac{i}{2}(\gamma+1) \{ 2 (\vec{\nabla} h_{00} \cdot \vec{E}_0) \vec{k} - (\vec{\nabla} h_{00} \cdot \vec{k}) \vec{E}_0 \} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (3.9)$$

Die "Antriebsterme" auf der rechten Seite von Gl. (3.9) erzeugen neue elektrische Felder in Ausbreitungsrichtung und in Richtung der ursprünglichen Feldstärke. Der erste Effekt steht in engem Zusammenhang mit der Lichtablenkung. Da in einem schwachen Gravitationsfeld die Polarisation einer elektromagnetischen Welle immer senkrecht zur Ausbreitungsrichtung⁷⁷ steht, kann dies nur bedeuten, daß der Lichtstrahl seine Richtung geändert hat. Der Ablenkwinkel α^* ist gemäß Fig. 4 durch

$$\alpha \equiv \frac{\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{e}}{|\vec{E}_0|} \quad (3.10)$$

gegeben, wobei $\vec{\mathcal{E}}$ die Amplitude der gestreuten Welle und $\vec{e} = c \frac{\vec{k}}{\omega}$ einen Einheitsvektor in Ausbreitungsrichtung bezeichnen. Hierbei haben wir noch zusätzlich angenommen, daß das Gravitationsfeld so schwach ist, daß $\alpha \ll 1$ gilt und wir $\tan \alpha \cong \alpha$ setzen können. Diese Annahme ist, wie sich zeigen wird, auch erfüllt.

* Die Ablenkwinkel auf Grund einer beliebigen, stationären bzw. rotierenden Massenverteilung seien mit α bzw. α' abgekürzt. Im Fall der Metrik Gl. (1.5) werden wir sie mit α_{Einstein} bzw. α_{Mach} bezeichnen.



Figur 4: Bei Streuung eines elektromagnetischen Feldes $\vec{E}(-\infty)$ an einem Gravitationsfeld wird eine Feldkomponente $\vec{E}$ in Richtung der ursprünglichen Ausbreitung erzeugt. Dies bedeutet eine Ablenkung des Strahls um einen Winkel α .

Zur Lösung von Gl. (3.9) versuchen wir den Ansatz

$$\vec{E}^{(1)} = \vec{E}(\vec{r}) e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}, \quad (3.11)$$

wobei wir eine langsam veränderliche Envelope $\vec{E}$ annehmen⁷⁸

$$|\vec{\nabla} \vec{E}| \ll |\vec{k} \cdot \vec{E}|. \quad (3.12)$$

Man kann sich leicht überzeugen, daß die linke Seite von Gl. (3.9) in dieser Approximation

$$\square^2 \vec{E}^{(1)} = 2i(\vec{k} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (3.13)$$

lautet und somit auf die Beziehung

$$(\vec{e} \cdot \vec{\nabla}) \vec{e} = \frac{1}{2}(\gamma+1) \left\{ \vec{e} (\vec{\nabla}_{h_{00}} \cdot \vec{E}_0) - \frac{1}{2} \vec{E}_0 (\vec{\nabla}_{h_{00}} \cdot \vec{e}) \right\}$$

führt. Integration dieser Gleichung unter Benutzung der Randbedingung (3.8) liefert schließlich

$$\vec{e}(\vec{r}) = \frac{1}{2}(\gamma+1) \left\{ \vec{e} \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot \vec{e} (\vec{\nabla}_{h_{00}} \cdot \vec{E}_0) - \frac{1}{2} \vec{E}_0 \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}_{h_{00}} \right\}.$$

Im letzten Schritt haben wir außerdem benutzt, daß der Ausbreitungsvektor $\vec{e}$ in niedrigster Ordnung in h konstant ist. Parametrisieren wir den Weg des Lichtes C durch seine Weglänge s und setzen

$$\vec{e} = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

so vereinfacht sich obiges Ergebnis zu

$$\vec{e}(\vec{r}) = \frac{1}{2}(\gamma+1) \left\{ \vec{e} \int_C ds (\vec{\nabla}_{h_{00}} \cdot \vec{E}_0) - \frac{1}{2} \vec{E}_0 \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}_{h_{00}} \right\}. \quad (3.14)$$

3.3.2 Einsteinsche Lichtablenkung

Unter Benutzung der Lösung (3.14) können wir jetzt den Ablenkwinkel α angeben. Wegen $\vec{e} \cdot \vec{E}_0 = 0$ (die Ausbreitungsrichtung steht immer senkrecht zum elektrischen Feld) finden wir unter Verwendung der Definition von α Gl. (3.10) aus Gl. (3.14)

$$\alpha_{\vec{E}} = \frac{1}{2}(\gamma+1) \int_C ds (\vec{\nabla}_{h_{00}} \cdot \vec{e}_{\vec{E}_0}), \quad (3.15)$$

wobei $\vec{e}_{\vec{E}_0}$ einen Einheitsvektor in Richtung von $\vec{E}_0$ bezeichnet.

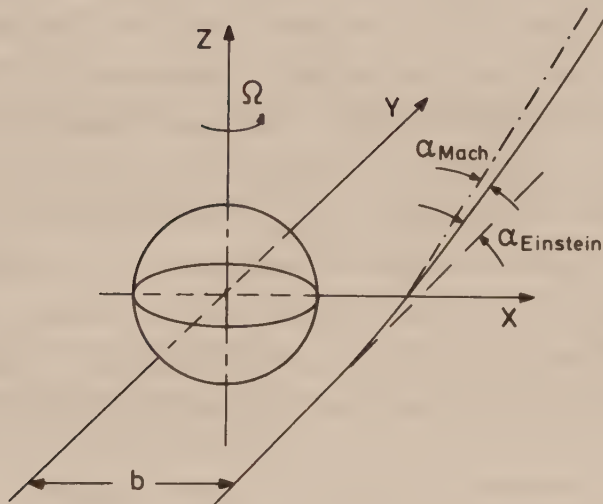
Zur Ableitung des bekannten Einsteinschen Ablenk winkels aus Gl. (3.15) betrachten wir jetzt die Streuung von Lichtwellen am Gravitationsfeld der

Sonne, die wir im Ursprung eines (kartesischen) Koordinatensystems annehmen (Fig. 5). Das Probesignal breite sich in der x-y Ebene parallel zur y-Achse aus. Der Impaktparameter sei mit b bezeichnet. Das elektrische Feld sei vor der Streuung in x-Richtung polarisiert.

Wir wollen den resultierenden Ablenkungswinkel mit α_{Einstein} bezeichnen und finden aus Gl. (3.15)

$$\alpha_{\text{Einstein}} = \frac{1}{2}(\gamma+1) \int_{-\infty}^{\infty} dy \left. \frac{\partial h_{00}}{\partial x} \right|_{\substack{x=b \\ z=0}},$$

wobei wir Beiträge von der Ordnung h^2 vernachlässigt haben. Setzen wir $h_{00} = -\frac{2GM_0}{c^2 r}$ (Gl. 1.5), so folgt nach kurzer Rechnung



Figur 5: Eine elektromagnetische Welle breitet sich parallel zur y-Achse im Gravitationsfeld der Sonne aus. Dies führt zur Ablenkung des Lichtstrahls um $\alpha = \alpha_{\text{Einstein}} + \alpha_{\text{Mach}}$. Die Einsteinsche Lichtablenkung α_{Einstein} rührt vom statischen Gravitationsfeld der Sonne her, während α_{Mach} von deren Rotation verursacht wird.

$$\alpha_{\text{Einstein}} = \frac{1}{2}(\gamma+1) \frac{4GM_{\odot}}{c^2 b} \quad (3.16)$$

Der PPN Parameter γ hat in der allgemeinen Relativitätstheorie den Wert⁴⁷ 1 und Gl. (3.16) reduziert sich zum Einsteinschen Resultat

$$\alpha_{\text{Einstein}} = \frac{4GM_{\odot}}{c^2 b} = 1.75''$$

wobei die Masse der Sonne $M_{\odot} = 1.99 \cdot 10^{33}$ g ist und wir Lichtstrahlen angenommen haben, die der Sonne ganz nahe kommen, d.h. $b \cong R_{\odot}$, wobei $R_{\odot}$ der Radius der Sonne mit $R_{\odot} \cong 6.96 \cdot 10^{10}$ cm ist.

Dieser Winkel wurde erstmals im Jahre 1919 von Eddington⁷⁹ et al. gemessen und voll bestätigt. Die Experimente wurden seit dieser Zeit fortgesetzt und verbessert, da der Ablenkungswinkel nach Gl. (3.16) Aufschluß über den PPN Parameter γ liefert.

Im Jahre 1801 untersuchte Soldner⁶⁵ die Lichtablenkung im Gravitationsfeld der Sonne, indem er dem Licht einen korpuskularen Charakter zuschrieb und außerdem das Newtonsche Gravitationsgesetz anwandte. Er fand jedoch nur den halben Wert des obigen Ablenkungswinkel, wie auch Einstein in seiner ersten Arbeit⁶⁶ über die "Trägheit des Lichts". Dies ist aus Gl. (3.16) auch sofort einleuchtend. Der Winkel α_{Einstein} setzt sich zu gleichen Teilen (falls wir die allgemeine Relativitätstheorie als richtig annehmen und $\gamma = 1$ setzen) aus einem allgemein relativistischen Beitrag (proportional zu γ) und dem Newtonschen Anteil zusammen. Streicht man den Term proportional zu γ , so findet man klarerweise nur die Hälfte des korrekten Resultats.

Aus diesen Betrachtungen sehen wir, daß Gl. (3.15) das bekannte Resultat⁸ liefert. Auf der anderen Seite folgt für eine in z-Richtung polarisierte Lichtwelle wegen $h_{00} \sim \frac{1}{r}$ die Beziehung

$$\alpha_{\text{Einstein}} \sim \int_{-\infty}^{\infty} dy \left(\vec{\nabla} h_{00} \cdot \vec{e}_z \right) \Big|_{\substack{x=b \\ z=0}} \sim \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{z}{r^3} \Big|_{\substack{x=b \\ z=0}}$$

und somit

$$\alpha_{\text{Einstein}} = 0$$

Dieser scheinbare Widerspruch läßt sich leicht auflösen, wenn man berücksichtigt, daß eine elektromagnetische Welle außer einem elektrischen Feld auch noch ein Magnetfeld besitzt. Ganz analog zu den Rechnungen im Kapitel II können wir auch eine Wellengleichung für den magnetischen Anteil ableiten. Im Fall $\vec{h} = 0$ und unter Vernachlässigung der Zeitdehnungseffekte lautet diese dann.

$$\square^2 \vec{B} = -\frac{1}{2}(\gamma+1) \left\{ -(\vec{\nabla} h_{00} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + 2 \vec{\nabla} h_{00} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \right\} \quad (3.17)$$

Durch Vergleich mit der entsprechenden Gleichung für das elektrische Feld Gl. (3.6) stellen wir fest, daß bis auf das Vorzeichen des ersten Termes auf der rechten Seite von (3.16) lediglich $\vec{E}$ durch $\vec{B}$ ersetzt ist. Eine zum Abschnitt 3.3.1 analoge Rechnung führt nach Definition eines Ablenkswinkels

$$\alpha_{\vec{B}} \equiv \frac{\vec{B} \cdot \vec{e}}{|\vec{B}_0|}$$

auf

$$\alpha_{\vec{B}} = \frac{1}{2}(\gamma+1) \int_C ds (\vec{\nabla} h_{00} \cdot \vec{e}_{\vec{B}_0}) \quad (3.18)$$

wobei $\vec{e}_{\vec{B}_0}$ einen Einheitsvektor in Richtung des ursprünglichen magnetischen Feldes bezeichnet.

Erst die beiden Ablenkungswinkel (3.15) und (3.18) zusammen bestimmen die Ausbreitungsrichtung des Lichtes. Dabei drückt $\alpha_{\vec{E}}$ den Ablenkungswinkel in der von $\vec{e}$ und $\vec{E}_0$ aufgespannten Ebene aus, während $\alpha_{\vec{B}}$ den Ablenkungswinkel in der $\vec{e} - \vec{B}$ Ebene mißt. Da die drei Vektoren, $\vec{E}$, $\vec{B}$ und $\vec{e}$ senkrecht aufeinander stehen, wird so die Lichtablenkung durch $\alpha_{\vec{E}}$ und $\alpha_{\vec{B}}$ vollständig beschrieben.

Wenden wir dies auf das Beispiel einer sich in positiver y Richtung ausbreitenden Welle an, deren elektrischer Feldvektor in z-Richtung polarisiert ist, so ist klar, daß das Magnetfeld in x-Richtung zeigt. Einsetzen in Gl. (3.18) bringt uns zurück zum Ergebnis (3.16). Es existiert also kein Widerspruch.

3.3.3 Verstärkung von Lichtwellen im Gravitationsfeld?

Aus Abschnitt 3.3.1 (Gl. (3.14)) ist ersichtlich, daß bei der Ausbreitung eines Probesignals im Gravitationsfeld nicht nur ein elektrisches Feld in Ausbreitungsrichtung erzeugt wird, (was zur Lichtablenkung führte), sondern daß sich auch die ursprüngliche Feldstärke und damit die elektrische Energiedichte $W_{el} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E E^*$ ändert. Aus Gl. (3.7), (3.11) und (3.14) finden wir

$$W_{el} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}_0^2 \left\{ 1 - \frac{1}{2} (\gamma + 1) \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot \vec{\nabla} h_{00} \right\}, \quad (3.19)$$

wobei wir Terme von der Ordnung h^2 vernachlässigt haben. Die Energiedichte der Welle ändert sich und zwar ortsabhängig. In dem Streuproblem, in dem sich das Licht aus dem gravitationsfreien Raum kommend ($\vec{r}_0 = -\infty$) durch ein Gravitationsfeld zur ebenen Raumzeit ($\vec{r} = +\infty$) ausbreitet, ist die gesamte Änderung der elektrischen Energiedichte

$$\Delta W_{el} = - \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}_0^2 \frac{1}{2} (\gamma + 1) \int_C d\vec{r}' \cdot \vec{\nabla} h_{00}$$

gegeben, wobei der Weg des Lichtes durch C bezeichnet sei. Dieser kann wegen $h_{00} = 0$ im gravitationsfreien Raum geschlossen werden, ohne den Wert des Integrals zu ändern. Mit dem Stokeschen Satz gilt dann, da die Singularität des Gravitationsfeldes nicht umschlossen ist,

$$\Delta W_{el} = 0$$

d.h. die Energiedichte bleibt erhalten. Die Energie, die das elektrische Feld beim Einlaufen in das Gravitationsfeld gemäß Gl. (3.19) an dieses abgibt, nimmt es beim Verlassen wieder auf. Ein zeitunabhängiges Gravitationsfeld, das die Form von Gl. (2.13) hat, erhält die Energie, ist also konservativ. Elektromagnetische Wellen können daher durch Streuung am Gravitationsfeld nicht verstärkt oder gedämpft werden.

Dies ist im Fall von rotierenden schwarzen Löchern nicht mehr richtig. Von verschiedenen russischen Autoren⁶⁷ wurde gezeigt, daß in diesem Fall in der Tat eine Verstärkung von elektromagnetischen Wellen* möglich ist. Dabei ist ganz wesentlich, daß es sich um ein rotierendes schwarzes Loch

* In Ref. 67 wurde nicht nur die Streuung von elektromagnetischen Wellen, sondern auch von skalaren Wellen oder Gravitationswellen untersucht. Der Effekt, der vom Spin der Streuwelle abhängt, ist für Gravitationswellen am größten.

und nicht um ein statisches vom Schwarzschildschen Typ handelt, da übertragene Energie und Drehimpuls von der Rotationsenergie und dem Spin des schwarzen Lochs genommen werden. Zur Beschreibung des Gravitationsfeldes eines rotierenden schwarzen Lochs dient die sogenannte Kerr-Metrik⁸, die einen Bereich in der Raum Zeit aufweist - die sogenannte Ergosphäre-, in der die Zeit t nicht mehr eine zeitartige Koordinate (d.h. $\vec{r}^2 < c^2 t^2$) darstellt. Dieser Verstärkungseffekt ist ganz eng mit der Ergosphäre verbunden. In der Schwachfeld-Näherung geht die Kerr-Metrik in die im Abschnitt 1.5 besprochene Lense-Thirring Metrik über. Dabei verschwindet jedoch die Ergosphäre. Daher kann kein Verstärkungseffekt für Streuung von Lichtwellen an einer rotierenden Masse erwartet werden. Dies werden wir auch im Abschnitt 3.4 bestätigen.

3.4 Mitnahme Effekte

Nach der Newtonschen Theorie ist die Beschleunigung eines Systems eine absolute Größe und die sogenannten Scheinkräfte, wie Zentrifugal- und Corioliskräfte, stellen ein absolutes Maß für die Beschleunigung eines Systems dar. Danach muß es in dem Gedanken-Experiment mit dem rotierenden Eimer einen Unterschied geben, ob der Eimer relativ zu den Fixsternen rotiert oder die Sterne relativ zu einem ruhenden Eimer rotieren. Im ersten Fall befindet sich das Wasser offensichtlich in einem Nichtinertialsystem und die Wasseroberfläche muß sich auf Grund der Zentrifugalkraft wölben. Jedoch ist im Fall der Rotation der Sterne das Wasser in einem Inertialsystem, es treten keine Kräfte auf und die Wasseroberfläche bleibt flach.

Im Gegensatz hierzu sieht Mach⁷⁵ Beschleunigung nicht als etwas Absolutes im Raum an, sondern als relativ zu den "Fixsternen im Universum". Daher, so argumentierte er, müßten bei Newton's Gedankenexperiment ebenfalls Zentrifugalkräfte im Eimer auftreten, wenn man die Sterne relativ zu dem Eimer rotieren lassen könnte. Diese Frage wurde erst 1918 von Thirring⁵ befriedigend gelöst. Er benutzt die Feldgleichungen und die Bewegungsgleichung der kurz zuvor von Einstein entwickelten allgemeinen Relativitätstheorie und berechnete die Kräfte im Zentrum einer rotierenden Hohlkugel, für deren Radius er den Weltradius annahm. Er fand in der Tat Kräfte, die dieselbe Form wie Zentrifugal oder Corioliskräfte haben, die allerdings sehr viel kleiner sind. In Zusammenarbeit mit

Lense⁶³ wurden diese Untersuchungen auf rotierende Vollkugeln erweitert. Diese dienten als Modell, um den Einfluß von rotierenden Massen auf die Umlaufsbahnen von Planeten zu berechnen. Daher nennt man diese von rotierenden schweren Massen herrührenden Kraftfelder Lense-Thirring-Felder. Die hieraus resultierenden Effekte sind jedoch um einen Faktor 10^6 kleiner, als die, die von dem Newtonschen Gravitationspotential verursacht werden und konnten daher auch bis heute noch nicht experimentell bestätigt werden. In diesem Abschnitt wollen wir den Einfluß dieser Lense-Thirring Felder auf die Lichtausbreitung untersuchen.

Zu diesem Zweck behandeln wir noch einmal die Lichtablenkung im Gravitationsfeld der Sonne, wobei jetzt auch deren Eigenrotation berücksichtigt werden wird. Rotiert die sphärische Masse M mit einem Drehimpuls S_z um die z -Achse, wie in Figur 5 dargestellt, so ergibt sich ein zusätzlicher Ablenkwinkel, den wir α_{Mach} nennen wollen. Dieser läßt sich nach Mach sofort aus der Relativität der Beschleunigung verstehen. Die Überlegungen mit dem rotierenden Eimer haben gezeigt, daß ein rotierendes Bezugssystem in gewissem Sinn zu einem von bewegten Massen erzeugten Gravitationsfeld, einem Lense-Thirring Feld, äquivalent ist*. Daher können wir in dem Lichtablenk-Problem die rotierende sphärische Masse M durch ein um die z -Achse

* Vergleichen wir daher die sogenannte Lense-Thirring Metrik (1.5) einer mit Drehimpuls S_z um die z -Achse rotierende Vollkugel der Masse M

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2) - 2 \frac{2GS_z}{c^3} \frac{y}{r^3} c dt dx + 2 \frac{2GS_z}{c^3} \frac{x}{r^3} c dt dy$$

(wir verwenden kartesische Koordinaten, die im Mittelpunkt der Kugel verankert sind) mit der im Abschnitt (3.5.2) abgeleiteten Metrik eines um die z -Achse rotierenden kartesischen Koordinatensystems (Gl. (3.38))

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\Omega^2(x^2+y^2)}{c^2}\right) c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) + 2\Omega \frac{y}{c} c dt dx - 2\Omega \frac{x}{c} c dt dy$$

so finden wir eine Übereinstimmung (zumindest) der Nebeldiagonalelemente, falls wir als Rotationsrate des Systems

$$\Omega = - \frac{2GS_z}{r^3 c}$$

wählen. Wir bemerken, daß die Rotation des Systems entgegen der Rotation der Masse ist.

rotierendes System ersetzen. Einem Beobachter in diesem Koordinatensystem erscheint ein gerader Lichtstrahl als gekrümmt. Im Abschnitt 3.4.2 leiten wir aus der Wellengleichung (2.17) einen Ausdruck für diesen Ablenkwinkel ab, der die PPN Mitnahme-Parameter Δ_1 und Δ_2 in der Kombination $7\Delta_1 + \Delta_2$ enthält. Dieses Experiment würde daher eine Möglichkeit darstellen, diese PPN Parameter zu testen. Numerisch ist der resultierende Ablenkwinkel jedoch um den Faktor 10^6 kleiner als bei der Einsteinschen Lichtablenkung.

Bisher haben wir festgestellt, daß das Licht bei der Ausbreitung durch ein Gravitationsfeld seine Frequenz und seine Ausbreitungsrichtung ändert. Da eine Lichtwelle auch noch durch die weitere Eigenschaft der Polarisation beschrieben wird, stellt sich natürlich auch die Frage nach der Änderung des Polarisationszustandes.^{73b}

Da das Gravitationsfeld als dielektrisches Medium wirkt, wäre dies analog zum Faraday-Effekt. Diesen Gravitations-Faraday-Effekt werden wir im Abschnitt 3.4.3 untersuchen. Im Fall der Streuung von elektromagnetischen Wellen an der rotierenden Sonne finden wir in Übereinstimmung mit Plebanski¹⁷, jedoch abweichend von Skrotskii¹⁹ und Balasz²⁰, keine Änderung der Polarisation.

3.4.1 Lösung der zugehörigen Wellengleichung

Die Mitnahme-Effekte rühren von der Rotation schwerer Massen her und erscheinen in der Wellengleichung (2.17) durch den Vektor $\vec{h}$. Die zugehörige Wellengleichung lautet sodann

$$\square^2 \vec{E} = 2(\vec{\nabla} \times \vec{h}) \times \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + c [(\vec{\nabla} \times \vec{h}) \cdot \vec{\nabla}] \vec{B} \quad (3.20)$$

Wir haben dabei den Term $-2(\vec{h} \cdot \vec{\nabla}) \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ unterdrückt, den wir im Abschnitt 3.5 gesondert untersuchen werden. Wir wollen wiederum den im Abschnitt 3.3 diskutierten Streuprozess annehmen und können den dort entwickelten Formalismus übernehmen.

Dazu zerlegen wir die Felder gemäß

$$\vec{E} = \vec{E}^{(0)} + \vec{E}^{(1)} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} + \vec{E}^{(1)} \quad (3.21)$$

$$\vec{B} = \vec{B}^{(0)} + \vec{B}^{(1)} = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} + \vec{B}^{(1)} \quad (3.22)$$

wobei die Randbedingungen

$$\vec{E}^{(1)}(\vec{r}_0 = -\infty) = 0 \quad (3.8)$$

und

$$\vec{B}^{(1)}(\vec{r}_0 = -\infty) = 0$$

erfüllt sein sollen. Einsetzen der Ansätze (3.21) und (3.22) in der Wellengleichung (3.20) und Vernachlässigung der Terme von der Ordnung h^2 führt auf

$$\Delta^2 \vec{E}^{(1)} = i \frac{\omega}{c} |\vec{E}_0| \left\{ [(\vec{\nabla} \times \vec{h}) \cdot \vec{e}] \vec{e}_{\vec{B}_0} - 2[(\vec{\nabla} \times \vec{h}) \cdot \vec{e}_{\vec{B}_0}] \cdot \vec{e} \right\} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (3.23)$$

wobei $\vec{e}_{\vec{B}_0}$ einen Einheitsvektor in Richtung von $\vec{B}_0$ bezeichnet. Dabei haben wir zur Berechnung von $(\vec{\nabla} \times \vec{h}) \times \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ die Beziehung $\vec{E}_0 = |\vec{E}_0| \vec{e}_{\vec{B}_0} \times \vec{e}$ benutzt.

Gleichung (3.23) zeigt wiederum, daß ein elektrisches Feld in Ausbreitungsrichtung erzeugt wird. Diese kann wie im Abschnitt 3.3.2 diskutiert, als Änderung der Ausbreitungsrichtung angesehen werden. Diese rührt offensichtlich von den Nebendiagonalelementen der Metrik und damit von der Rotation von schweren Massen her. Der Lichtstrahl wird also durch die Rotation der Masse "mitgerissen" oder "mitgeführt" und abgelenkt. Diese Art von Lichtablenkung werden wir daher als Mitnahme-Ablenkung oder auch, da sie sich, wie wir gesehen haben, aus dem Machschen Prinzip erklären läßt, als Machsche Lichtablenkung bezeichnen.

Der erste Term in Gl. (3.23) erzeugt, eine Komponente in Richtung des Magnetfeldes. Da dieses senkrecht zum elektrischen Feld steht, kann dies nur bedeuten, daß das Gravitationsfeld die Polarisation des Lichtes geändert hat. In Analogie zum Faraday-Effekt kann man daher von einem Gravitations-Faraday-Effekt sprechen.

Wir halten außerdem fest, daß die Nebendiagonalelemente der Metrik $\vec{h}$ kein elektrisches Feld in Richtung des ursprünglichen Feldes erzeugen. Wir erhalten daher keine Änderung der elektrische Energie der Welle und somit auch keine Verstärkung von Lichtwellen.

Zur Lösung von Gl. (3.23) versuchen wir den Ansatz

$$\vec{E}^{(u)} = \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})},$$

wobei wir wiederum eine langsam veränderliche Envelope $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}(\vec{r})$ annehmen wollen. Damit reduziert sich Gl. (3.23) zu

$$(\vec{e} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \frac{1}{2} |\vec{E}_0| [(\vec{\nabla} \times \vec{h}) \cdot \vec{e}] \vec{e}_{\vec{B}_0} - |\vec{E}_0| [(\vec{\nabla} \times \vec{h}) \cdot \vec{e}_{\vec{B}_0}] \vec{e}$$

wobei wir Gl. (3.13) benutzt haben. Integration dieser Gleichung entlang des Lichtweges C liefert unter Verwendung der Randbedingung (3.8)

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \vec{e}_{\vec{B}_0} \frac{1}{2} |\vec{E}_0| \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{h}) - \vec{e} |\vec{E}_0| \int_C ds (\vec{\nabla} \times \vec{h}) \cdot \vec{e}_{\vec{B}_0} \quad (3.24)$$

In den nächsten beiden Abschnitten werden wir ausgehend von dieser Lösung den Machschen Ablenkwinkel und den Gravitations-Faraday-Effekt bestimmen.

3.4.2 Machsche Lichtablenkung

Definieren wir den Ablenkwinkel α' analog zu dem im Abschnitt 3.3.2 diskutierten Winkel α durch

$$\alpha' \equiv \frac{\mathcal{E} \cdot \vec{e}}{|\vec{E}_0|}$$

so finden wir aus Gl. (3.24) sofort

$$\alpha' = - \int_C ds (\vec{\nabla} \times \vec{h}) \cdot \vec{e}_{\vec{B}_0}, \quad (3.25)$$

wobei C den Weg des Lichtes bezeichnet.

Bevor wir dieses Ergebnis auf die Streuung von Lichtwellen am Gravitationsfeld der rotierenden Sonne anwenden, wollen wir zwei Eigenschaften dieses Winkels festhalten. Zunächst hängt er wiederum von der Polarisationsrichtung des Lichtes ab. Aus Abschnitt 3.3.2 wissen wir jedoch, daß es eine zu Gl. (3.25) analoge Gleichung gibt, in der das elektrische Feld erscheint. Darauf wollen wir jetzt jedoch nicht weiter eingehen. Von weit größerem

Interesse ist die Tatsache, daß der Ablenkungswinkel α' eichinvariant ist. Man kann zeigen, daß die Einsteinschen Feldgleichungen in der Schwachfeld-Näherung invariant bleiben⁸ unter infinitesimalen Koordinatentransformationen*

$$\bar{x}^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}$$

wobei die Größen ξ^{μ} vier beliebige Funktionen sind, die die PPN Eichbedingung erfüllen und die Relation $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ nicht verletzen. Aus kurzer Rechnung erkennt man nämlich, daß sich der metrische Tensor

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

unter der obigen Koordinatentransformation gemäß

$$\bar{h}^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} + \xi^{\mu, \nu} + \xi^{\nu, \mu} \quad (3.26)$$

transformiert. Damit sehen wir, daß die Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen bis auf infinitesimale Koordinatentransformationen festgelegt sind. Jede physikalische Größe, wie z.B. der Winkel α' muß daher auch invariant unter einer Änderung des Koordinatensystems und, was damit äquivalent ist, unter einer Transformation der Metrik gemäß Gl. (3.26) sein.

Für eine zeitunabhängige Metrik d.h. $h^{\mu\nu}_{,0} \equiv \frac{1}{c} \frac{\partial h^{\mu\nu}}{\partial t} = 0$ folgt somit das folgende Transformationsverhalten für den Vektor $\vec{h}$

$$\bar{h}_{0i} = h_{0i} + \xi^{0,i}$$

oder

$$\vec{\bar{h}} = \vec{h} - \vec{\nabla} \xi^0$$

wobei ξ^0 eine skalare Funktion von den kartesischen Koordinaten x^i ist. Wegen des bekannten Theorems

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \xi^0) = 0 \quad (3.28)$$

* Griechische Indizes laufen von 0 bis 3, während lateinische von 1 bis 3 reichen.

ist somit der Machsche Ablenkwinkel eichinvariant.

Wir wollen jetzt das im Abschnitt 3.3.2 diskutierte Streuproblem unter Berücksichtigung der Eigenrotation der Sonne behandeln. Wir nehmen für die Richtung des Drehimpulses S_z der Sonne die z-Richtung an; die Lichtwelle breite sich wie in Abbildung 5 gezeigt, parallel zur y-Achse mit einem Impaktparameter b aus. Die elektrische Feldstärke zeige anfänglich in die positive x-Richtung, sodaß

$$\vec{e}_{\vec{B}_0} = -\vec{e}_z$$

Für den Machschen Ablenkwinkel α_{Mach} finden wir dann aus Gl. (3.25)

$$\alpha_{\text{Mach}} = \int_{-\infty}^{\infty} dy (\vec{\nabla} \times \vec{h})_z \Big|_{\substack{x=b \\ z=0}} .$$

Einsetzen der Lense-Thirring-Metrik (1.5) im PPN Formalismus

$$h_{01} = -\frac{1}{8}(7\Delta_1 + \Delta_2) \frac{2G\mathcal{J}_z}{c^3} \frac{y}{r^3} ; h_{02} = \frac{1}{8}(7\Delta_1 + \Delta_2) \frac{2G\mathcal{J}_z}{c^3} \frac{x}{r^3} ; h_{03} = 0$$

liefert nach kurzer Rechnung*

$$\alpha_{\text{Mach}} = \frac{1}{8}(7\Delta_1 + \Delta_2) \frac{4G\mathcal{J}_z}{c^3 b^2} . \quad (3.29)$$

Dabei sind die Größen Δ_1 und Δ_2 die PPN Mitnahme Parameter. Für einen positiven Drehimpuls finden wir also einen positiven Ablenkwinkel. Dies bedeutet nach Figur 5, daß das Licht in dieselbe Richtung abgelenkt wird als die Masse rotiert. Der Lichtstrahl wird in der Tat von der Rotation "mitgerissen" oder "mitgeführt".

Um ein Gefühl für die Größenordnung dieses Winkels zu bekommen, schätzen wir abschließend noch das Verhältnis $\frac{\alpha_{\text{Mach}}}{\alpha_{\text{Einstein}}}$ für Lichtstrahlen ab, die die Sonne fast streifen. Der Drehimpuls der Sonne nehmen wir zu $\mathcal{J}_z = \frac{2}{5} M_\odot R_\odot^2 \Omega_\odot$ an, wobei wir für $\Omega_\odot = 10^{-6} \text{ sec}^{-1}$ und für den Impaktparameter wiederum $b \cong R_\odot$ setzen. Somit finden wir aus Gl. (3.16) und (3.29)

* Dieses Ergebnis wurde zum erstenmal für $\Delta_1 = \Delta_2 = 1$ von Skrotskii¹⁹ abgeleitet und später im Detail von Plebanski¹⁷ diskutiert.

$$\frac{\alpha_{\text{Mach}}}{\alpha_{\text{Einstein}}} = \frac{\frac{1}{8}(7\Delta_1 + \Delta_2)}{\frac{1}{2}(\gamma+1)} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{R_0}{b} \cdot \frac{R_0 \cdot \varrho_0}{c} \approx \frac{\frac{1}{8}(7\Delta_1 + \Delta_2)}{\frac{1}{2}(\gamma+1)} 10^{-6}$$

Derartige kleine Winkel sind mit der heutigen Meßtechnik leider nicht zu bestimmen.

3.4.3 Gravitations-Faraday-Effekt

Im Abschnitt 3.4.1 (Gl. (3.24)) haben wir gezeigt, daß die Nebendiagonalelemente der Metrik $\vec{h}$ eine elektrische Feldstärke in Richtung des ursprünglichen Magnetfeldes, d.h. senkrecht zur Ausbreitungsrichtung und senkrecht zum anfänglichen elektrischen Feld erzeugen. Dies haben wir als Änderung der Polarisierung des Lichtes interpretiert. Der Drehwinkel θ_F dieser Polarisationsänderung ist durch

$$\theta_F = \frac{\vec{e} \cdot \vec{e}_B}{|\vec{E}_0|}$$

gegeben und folgt aus Gl. (3.24) zu

$$\theta_F = \frac{1}{2} \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{h}) \quad (3.30)$$

Der Drehwinkel ist somit unabhängig von der Ausgangs-Polarisation der Welle. Darüber hinaus ist er wegen Gl. (3.28) auch eichinvariant.

Wir wollen jetzt die Änderung der Polarisierung wieder für den Fall der Streuung von Lichtwellen am Gravitationsfeld der rotierenden Sonne berechnen. Dazu betrachten wir wiederum die in den vorigen Abschnitten diskutierte Streusituation, wobei die Lichtwelle ausgehend vom gravitationsfreien Raum längs des Weges C, der nicht notwendig parallel zur y-Achse verläuft, durch das Gravitationsfeld den schwerkraftfreien Bereich erreicht. Um die Rechnung etwas zu erleichtern, formen wir zunächst Gl. (3.30) um.

Da im gravitationsfreien Raum die Beziehung $\vec{h} = 0$ gilt*, können wir

* Für die Lense-Thirring Metrik Gl. (1.5) finden wir z.B. $\vec{\nabla} \times \vec{h} \sim O\left(\frac{1}{r^3}\right)$ und damit $\int d\vec{r}' \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{h}) \sim O\left(\frac{1}{r^2}\right)$.

den Integrationsweg C schließen, ohne den Wert des Integrals zu ändern und erhalten mittels des Stokeschen Satzes

$$\begin{aligned}\theta_F &= \frac{1}{2} \oint d\vec{r} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{h}) = \\ &= \frac{1}{2} \iint d\vec{A} \cdot [\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{h}) - \vec{\nabla}^2 \vec{h}] = -\frac{1}{2} \iint d\vec{A} \cdot \vec{\nabla}^2 \vec{h},\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Eichbedingung $\vec{\nabla} \cdot \vec{h} = 0$ benutzt haben und $\vec{A}$ die vom Weg C umschlossene (ebene) Fläche bezeichnet. Vermöge die in Ref. 4 diskutierten Feldgleichung

$$\vec{\nabla}^2 \vec{h} = -\kappa c \vec{j}$$

mit

$$\kappa \equiv \frac{16\pi G}{c^4}$$

folgt somit

$$\theta_F = -\frac{8\pi G}{c^3} \iint d\vec{A} \cdot \vec{j} \quad (3.31)$$

wobei A die von dem geschlossenen Weg C umschlossenen Fläche ist.

Für den Fall der Streuung von Lichtwellen am Gravitationsfeld der rotierenden Sonne kann man sich leicht klarmachen, daß kein Weg C existiert, der außerhalb der Sonne* verläuft und bei dem der Massenstrom $\vec{j}$ durch die Fläche A nicht verschwindet. Daher finden wir jetzt

$$\theta_F = 0$$

d.h. es gibt keinen Gravitations-Faraday Effekt^{73b} im Gravitationsfeld der rotierenden Sonne. Dieses Ergebnis wurde zum erstenmal von Plebanski¹⁷ mit einer anderen Methode abgeleitet und steht im Gegensatz zu Arbeiten von Balazs²⁰ und Skrotskii¹⁹, die einen von Null verschiedenen Wert für θ_F angegeben haben.

* Wie im Abschnitt 2.3 erwähnt, beschreibt die Wellengleichung (2.17) nur das elektrische Feld außerhalb der Massen- bzw. Stromverteilung.

3.5 Verallgemeinerter Sagnac-Effekt

Im letzten Abschnitt haben wir den Einfluß von rotierenden Massen auf die Ausbreitung von Lichtwellen untersucht. Die dabei auftretende Machsche Lichtablenkung hat sich jedoch als so klein herausgestellt, daß sie selbst mit Hilfe der besten Meßmethoden nicht nachgewiesen werden kann. So konnte bis heute noch keiner der von Lense und Thirring^{5,63} schon 1918 vorhergesagten Mitnahme-Effekte experimentell überprüft werden. In diesem Abschnitt wollen wir ein optisches Experiment untersuchen, das es erlauben würde, die Fehlergrenzen der bisher schon gemessenen PPN Parameter einzuschränken.

Dazu werden wir den letzten, bisher noch nicht diskutierten Antriebs-term in Gl. (2.17) diskutieren. Anders als in den Abschnitten 3.2 bis 3.4 wollen wir jetzt keinen Streuprozeß am Gravitationsfeld behandeln, sondern die Lichtausbreitung in einem Ringresonator, der sich in einem Gravitationsfeld befindet, untersuchen, welches z.B. durch die rotierende Erde erzeugt wird. Im nächsten Abschnitt werden wir zunächst den Einfluß des "Gravitationspotentials" $\vec{h}$ auf die Frequenz des Lichtes untersuchen. Dabei werden wir feststellen, daß die zwei gegenläufigen Wellen eine relative Frequenzverschiebung erfahren. Diese Frequenzverschiebung wurde zum erstenmal von Scully et al.^{22,23} für den Fall eines schwachen Gravitationsfeldes abgeleitet und konnte in Ref. 26 für den Fall einer beliebigen Metrik $g_{\mu\nu}$ verallgemeinert werden. In dieser Arbeit werden wir jetzt ausgehend von der Wellengleichung (2.17) das Ergebnis von Ref. 23 ableiten. Daran anschließend werden wir ein auf der Erde ausführbares Experiment mit einem Ring-Laser-Gyroskop besprechen und die auftretenden Frequenzverschiebungen aus einer Analogie zur Elektrodynamik^{1,4} diskutieren.

3.5.1 Ableitung der Sagnac Frequenzverschiebung aus der Wellengleichung

Zur Lösung der Wellengleichung mit dem letzten Quellterm aus Gl. (2.17)

$$\square^2 \vec{E} = - \frac{2}{c} (\vec{h} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3.32)$$

versuchen wir den Ansatz

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\vartheta} = \vec{E}_0 e^{i[(\omega + \Delta\omega)t + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot \vec{k}(\vec{r}') + \phi(\vec{r})]} \quad (3.33)$$

Wir wollen der Einfachheit halber annehmen, daß der Strahlengang in einer Ebene verläuft⁸¹. Davon abgesehen, lassen wir eine beliebige Form des Lichtweges C zu. Außerdem sei das elektrische Feld (z.B. durch Brewster Fenster) senkrecht zur Ebene des Gyroskops polarisiert. Der Vektor $\vec{E}_0$ ist somit entlang des Lichtweges konstant. Den Betrag des Wellenvektors $\vec{k}$ nehmen wir als konstant an, seine Richtung wird sich jedoch auf Grund des beliebigen Lichtweges C ändern. Sie ist daher eine Funktion des Ortes d.h.

$$\vec{k} = \vec{k}(\vec{r}) = \frac{\omega}{c} \vec{e}(\vec{r}) \quad (3.34)$$

Dabei bezeichnet $\vec{e}(\vec{r})$ einen Einheitsvektor in Ausbreitungsrichtung am Ort $\vec{r}$. Den Einfluß des Gravitationsfeldes $\vec{h}$ beschreiben wir durch eine Frequenzverschiebung $\Delta\omega$ und eine ortsabhängige Phasenverschiebung ϕ , die mindestens linear von den Nebendiagonalelementen h_{0i} abhängen sollen.

Durch Einsetzen des Ansatzes (3.33) in Gl. (3.32) unter Berücksichtigung der Konstanz des Vektors $\vec{E}_0$, folgt

$$\frac{1}{c^2} (\omega + \Delta\omega)^2 - (\vec{k} + \vec{\nabla}\phi)^2 = -2 \frac{\omega}{c} \vec{h} \cdot \vec{k} \quad (3.35)$$

wobei wir Terme von der Ordnung h^2 vernachlässigt haben. Wegen $\Delta\omega \sim o(h)$ und $\vec{\nabla}\phi \sim o(h)$ vereinfacht sich Gl. (3.35) zu

$$\Delta\omega - c \vec{e} \cdot \vec{\nabla}\phi = - \frac{c}{\chi} \vec{h} \cdot \vec{e}$$

wobei wir noch Gl. (3.34) benutzt und die reduzierte Wellenlänge

$$\chi = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{c}{\omega}$$
 eingeführt haben.

Eine Lösung dieser Gleichung läßt sich sofort durch

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\Delta\omega}{c} \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot \vec{e}(\vec{r}') + \frac{1}{\chi} \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot \vec{h}(\vec{r}')$$

angeben, wobei $\vec{r}_0$ einen Punkt auf dem Lichtweg C bezeichnet. Die Phasenverschiebung nach einem Umlauf des Lichts ist somit

$$\phi = \frac{\Delta\omega}{c} \oint d\vec{r} \cdot \vec{e}(\vec{r}) + \frac{1}{\chi} \oint d\vec{r} \cdot \vec{h}(\vec{r}) = \frac{\Delta\omega}{c} L + \frac{1}{\chi} \oint d\vec{r} \cdot \vec{h}(\vec{r}) \quad (3.36)$$

wobei wir die Länge des Ring-Resonators in Abwesenheit von Gravitationseffekten mit L abgekürzt haben.

In einem Ring-Laser ist die Lichtquelle innerhalb des Resonators. Das elektrische Feld muß daher der Periodizitätsbedingung

$$E(t, s+L) = E(t, s)$$

genügen und somit muß die Phase $\mathcal{S}$ der Welle nach einem Umlauf ein ganzzahliges Vielfaches von 2π sein. Aus dem Ansatz (3.33) und Gl. (3.36) folgt somit die Bedingung

$$\mathcal{S} = 2\pi n = \frac{\Delta\omega}{c} L + \frac{1}{\chi} \oint d\vec{r} \cdot \vec{h}(\vec{r}) + \oint d\vec{r} \cdot \vec{k}(\vec{r})$$

woraus wir wegen Gl. (3.34)

$$\oint d\vec{r} \cdot \vec{k}(\vec{r}) = \oint d\vec{r} \cdot \vec{e}(\vec{r}) \frac{\omega}{c} = 2\pi n$$

sofort

$$\Delta\omega = -\frac{c}{\chi L} \oint d\vec{r} \cdot \vec{h}(\vec{r})$$

erhalten. Berücksichtigen wir noch, daß in einem Ring-Laser zwei gegenläufige Wellen existieren, so finden wir für deren relative Frequenzverschiebung das doppelte Ergebnis, nämlich

$$\Delta\tilde{\omega} = -\frac{2c}{\chi L} \oint d\vec{r} \cdot \vec{h}(\vec{r}) ,$$

Anwendung des Stokeschen Satzes bringt dieses Resultat auf die eichinvariante Form*.

$$\Delta\tilde{\omega} = -\frac{2c}{\chi L} \iint d\vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{h}) \quad (3.37)$$

* Wir betonen nochmals, daß die Gl. (3.37) entsprechend Abschnitt 3.4.2 invariant unter der Transformation

$$\vec{h} \rightarrow \vec{h} - \vec{\nabla} \xi(\vec{r})$$

für eine beliebige, skalare Funktion ξ ist.

wobei A die von den Lichtstrahlen umschlossene ebene Fläche des Gyroskops bezeichnet. Bevor wir dieses Ergebnis auf ein Ring-Laser-Experiment auf der rotierenden Erde anwenden, wollen wir zeigen, inwiefern Gl. (3.37) eine Verallgemeinerung des klassischen Sagnac-Effekts darstellt.

3.5.2. Rotierendes Interferometer und klassischer Sagnac Effekt

Im klassischen Sagnac-Experiment²¹ beobachtet man in einem Ring-Interferometer zwei gegenläufige, elektrische Wellen gleicher Frequenz. Rotiert das Interferometer um eine Achse senkrecht zu seiner Ebene, so findet man eine zur Rotationsrate proportionale Frequenzverschiebung. Dabei werden alle Gravitationseffekte z.B. durch Anwesenheit von Massen vernachlässigt. Um diesen klassischen Effekt aus Gl. (3.37) abzuleiten, benötigen wir die Metrik im rotierenden Interferometer, also die Metrik in einem rotierenden Bezugssystem. Diese finden wir durch einfache Transformation des Linienelements des flachen Raumes

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

in ein mit konstanter Rate Ω um die z-Achse rotierendes System gemäß

$$\begin{aligned} x^0 = \bar{x}^0 = ct & & x^1 = \bar{x} = \bar{x}^1 \cos \Omega t - \bar{x}^2 \sin \Omega t \\ x^3 = \bar{x}^3 = z & & x^2 = \bar{y} = \bar{x}^1 \sin \Omega t + \bar{x}^2 \cos \Omega t \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Koordinaten im rotierenden System mit

$$x^\mu = (ct', x', y', z')$$

bezeichnet. Diese Transformation führt auf das Linienelement

$$\begin{aligned} ds^2 = & \left[1 - \frac{\Omega^2 (x'^2 + y'^2)}{c^2} \right] c^2 dt'^2 - [(dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2] \\ & + 2\Omega \frac{y'}{c} c dt' dx' - 2\Omega \frac{x'}{c} c dt' dy' \end{aligned} \quad (3.38)$$

und wir finden für den Vektor $\vec{h}$ die Komponenten

$$h_{01} = \frac{\Omega}{c} y' \quad ; \quad h_{02} = -\frac{\Omega}{c} x' \quad ; \quad h_{03} = 0 \quad .$$

Dies liefert

$$(\vec{\nabla} \times \vec{h}) \cdot \vec{e}_z = -2 \frac{\Omega}{c}$$

und aus Gl. (3.37) folgt somit

$$\Delta\omega_{\text{Sagnac}} = \frac{4A\Omega}{\lambda L} \quad (3.39)$$

Dies ist die bekannte klassische Sagnac-Frequenzverschiebung.²¹

3.5.3 Gyroskop Experiment²³

Im Abschnitt 3.5.1 haben wir einen Ausdruck für die Sagnac Frequenzverschiebung im Ring-Laser-Gyroskop in Anwesenheit eines Gravitationsfeldes $\vec{h}$ abgeleitet. Dieses Ergebnis wollen wir jetzt auf ein auf der rotierenden Erde durchgeführtes Ring-Laser-Experiment anwenden.

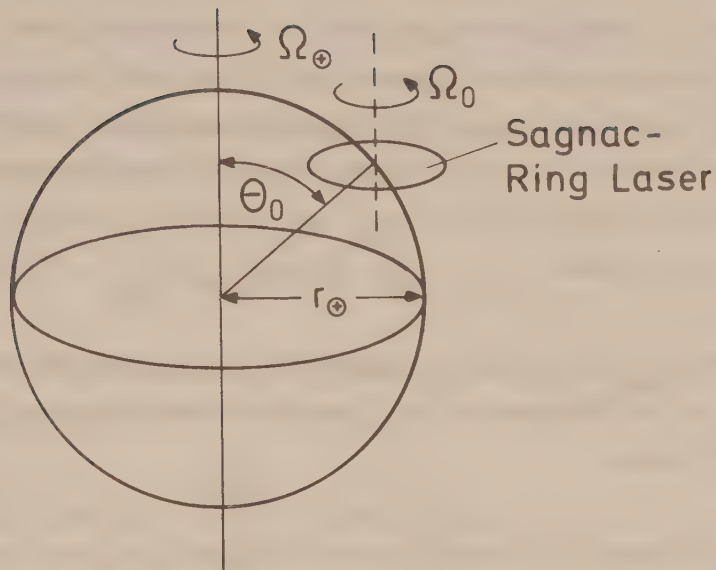
Ein Interferometer rotiere mit einer Frequenz $\Omega_{\oplus}$, unter dem Winkel θ_0 zwischen Erdachse und Verbindung zum Mittelpunkt und im Abstand $\vec{r} = r_{\oplus} \sin \theta_0$ um die Erdachse. Außerdem führe es eine Eigenrotation mit der Frequenz Ω_0 aus, wobei die Rotationsachse, wie in Abbildung 6 dargestellt, parallel zur Erdachse ist. Der Fall der beliebigen Orientierung dieser Achse ist in Ref. 23 behandelt worden.

Zur Berechnung der Sagnac-Frequenzverschiebung gemäß Gl. (3.37) ist die Kenntnis des "Vektorpotentials" $\vec{h}$ notwendig. Dieses kann durch Transformation der Lense-Thirring-Metrik im PPN Formalismus in das doppelt rotierende Bezugssystem des Ring-Laser-Gyroskops bestimmt werden. Diese komplizierte Rechnung ist in Ref. 23 im Detail durchgeführt. Wir begnügen uns hier damit, dieses Ergebnis zu übernehmen und durch eine Analogie zur Elektrodynamik plausibel zu machen. Für die Frequenzverschiebung erhält man nach Ref. 23

$$\Delta\omega = \frac{4A}{\lambda L} \left\{ \Omega_0 + \Omega_{\oplus} + \alpha_1 T_{\alpha_1} + \frac{1}{2}(\gamma+1) T_{\gamma} + \frac{1}{8}(\gamma\Delta_1 + \Delta_2) T_{\gamma} \right\} \quad (3.40)$$

wobei die Terme T_{α_1} , T_{γ} und T_{Δ} mit der Existenz eines bevorzugten Bezugssystems, mit Raumkrümmungs-Effekten und mit dem Lense-Thirring-Effekt verknüpft sind. Sie sind durch

$$\begin{aligned} T_{\alpha_1} &= -\frac{1}{8} \frac{r_s}{r_{\oplus}} |\vec{\omega}| B(t_s) \sin \theta_0 \\ T_{\gamma} &= -\frac{r_s}{r_{\oplus}} \Omega_{\oplus} \sin^2 \theta_0 \\ T_{\Delta} &= \frac{1}{10} \frac{r_s}{r_{\oplus}} \Omega_{\oplus} (1 - 3 \cos^2 \theta_0) \end{aligned} \quad (3.41)$$



Figur 6: Rotierende Erde mit Ring-Laser-Gyroskop

gegeben, wobei $r_s = \frac{2GM_\oplus}{c^2}$ den Schwarzschild Radius und $M_\oplus$ die Masse der Erde bezeichnen. Die Parameter α_1 , γ , Δ_1 und Δ_2 sind PPN Parameter, deren Werte wir in Tabelle 1 zusammengefaßt haben. Ihre physikalische Bedeutung, die auch schon im Abschnitt 1.5 diskutiert wurde, wird klar werden, wenn wir die Beiträge $T_{\alpha 1}$, T_γ und T_Δ näher diskutieren. Das Symbol $|\vec{w}|$ bezeichnet die Geschwindigkeit der Erde relativ zu den Fixsternen, d.h. relativ zu einem Bezugssystem, in dem die kosmische Hintergrund-Strahlung isotrop erscheint. Diese Größe wurde von Smoot et al.⁸² zu

$$|\vec{w}| = (360 \pm 60) \frac{\text{km}}{\text{sec}}$$

bestimmt. Weitere Größen, die in Gl. (3.41) auftauchen sind

$$B(t_s) = \cos \delta \cos \alpha \quad \delta = 6^\circ \pm 10^\circ$$

$$\alpha = \Omega_\oplus (t_s - (11 \pm 0.6) \text{hr}) .$$

Numerisch ist der Beitrag zu $\Delta\omega$ aus der Existenz bevorzugter Bezugssysteme maximal $1.2 \cdot 10^7 \alpha_1 \Omega_{\odot}$, der Raumkrümmungs-Effekt $1.4 \cdot 10^9 \frac{1}{2}(\gamma+1) \Omega_{\oplus}$ und der Lense-Thirring-Effekt $5.6 \cdot 10^{10} \frac{1}{2}(7\Delta_1 + \Delta_2) \Omega_{\oplus}$.

Wir gehen jetzt zu einer Diskussion der einzelnen Beiträge in Gl. (3.40) über. Die beiden ersten Terme sind offensichtlich klassische Sagnac Terme, die von der doppelten Rotation des Ring-Laser-Gyroscopes herrühren: Eine Rotation um die eigene Achse mit der Frequenz Ω_0 und eine mit der Erdrotationsfrequenz $\Omega_{\oplus}$, da sich das Gyroskop auf der rotierenden Erde befindet.

Die anderen Terme T_{α_1} , T_{γ} und T_{Δ} werden wir jetzt aus der Analogie der allgemeinen Relativitätstheorie in Schwachfeld-Näherung zur Elektrodynamik^{1,4} motivieren.

In der Einleitung haben wir schon darauf hingewiesen, daß man "elektrische" und "magnetische" Gravitationsfelder unterscheiden kann. In dieser Analogie entspricht dem Newtonschen Gravitationsfeld $\vec{G} = -\vec{\nabla}U$, wobei U das Newtonsche Potential bezeichnet, das elektrische Feld $\vec{E}$, sodaß das Feld $\vec{G}$ als "elektrisches Gravitationsfeld" bezeichnet wird. Das Gravitationspotential $\vec{h}$ ist analog zum Vektorpotential $\vec{A}$ der Elektrodynamik. Daher entspricht $\vec{\nabla} \times \vec{h}$ einem Magnetfeld und wird "magnetisches Gravitationsfeld" genannt.

Nach Gl. (3.37) ist die Sagnac-Frequenzverschiebung proportional zu $\vec{\nabla} \times \vec{h}$. Somit erzeugt jedes "magnetische Gravitationsfeld" einen Sagnac-Effekt. Aus diesen Bemerkungen heraus lassen sich jetzt die beiden Beiträge T_{α_1} und T_{Δ} verstehen. Wir wollen mit dem Raumkrümmungs Term T_{γ} beginnen.

Es ist in der Elektrodynamik bekannt, daß elektrische und magnetische Felder nicht voneinander unabhängig existieren. Ein reines elektrisches oder magnetisches Feld in einem Koordinatensystem wird als Mischung von beiden Feldern in einem bewegten Bezugssystem erscheinen. Ein Beobachter, der sich durch ein reines elektrisches Feld bewegt, sieht ein magnetisches Feld $\vec{B}$, das senkrecht auf der Geschwindigkeit $\vec{v}$ steht und durch⁸³

$$\vec{B} = \vec{v} \times \vec{A} \sim \vec{v} \times \vec{E}$$

gegeben ist. Wir wollen jetzt diesen Gedankengang auf das Gyroskop-Problem übertragen. Da der Ring-Laser auf der Erde fixiert ist und da diese rotiert, bewegt sich das Gyroskop durch das radial-symmetrische Gravitationsfeld der Erde $\vec{G} \sim \frac{\vec{r}}{r^3}$, wobei sein Abstand zum Mittelpunkt der Erde $r = r_{\oplus}$ beträgt und seine Geschwindigkeit durch $\vec{v} = r_{\oplus} \Omega \sin \theta_0 \vec{e}_{\phi}$ gegeben ist. Der Einheitsvektor in azimuthaler Richtung sei mit $\vec{e}_{\phi}$ bezeichnet. Gemäß der obigen Diskussion muß dies auf ein "magnetisches Gravitationsfeld" der Form

$$\vec{\nabla} \times \vec{h} \sim \frac{1}{r_{\oplus}} \Omega_{\oplus} \sin \theta_0 \vec{e}_{\phi} \times \vec{e}_r$$

führen. Da die Flächennormale des Gyroskops in z-Richtung zeigt, d.h. $d\vec{A} = |dA| \vec{e}_z$, folgt somit

$$(\vec{\nabla} \times \vec{h}) \cdot \vec{e}_z \sim \frac{\Omega_{\oplus}}{r_{\oplus}} \sin^2 \theta_0 .$$

Dies ist der Raumkrümmungseffekt Gl. (3.41), wobei man auch die richtigen Konstanten erhält, wenn man die Analogie exakt verfolgt. Wir halten fest, daß dieser Effekt aus der Anwesenheit der Masse der Erde und der Bewegung des Gyroskops durch das hieraus resultierende Gravitationsfeld herrührt.

Auch der Term T_{Δ} aus Gl. (3.41) läßt sich leicht aus dieser Analogie Gravitation-Elektrodynamik verstehen. In der Elektrodynamik ist bekannt, daß eine rotierende, homogen geladene Kugel mit Radius a nicht nur ein elektrisches Feld, sondern auch ein Magnetfeld $\vec{B}$ besitzt. Dieses ist außerhalb der Kugel durch⁸⁴

$$\vec{B} \sim a^2 \frac{3\vec{r} \cdot (\vec{\Omega} \cdot \vec{r}) - \vec{\Omega}(\vec{r}^2)}{r^5}$$

gegeben, wobei $\vec{r}$ den Beobachtungspunkt und Ω die Rotationsrate bezeichnen. Danach wird ein bei $\vec{r} = r_{\oplus} \vec{e}_r$ postiertes Gyroskop das folgende "magnetische Gravitationsfeld" der rotierenden Erde ($a = r_{\oplus}$, $\Omega = \Omega_{\oplus}$)

$$\vec{\nabla} \times \vec{h} \sim \frac{3\vec{e}_r (\vec{\Omega}_{\oplus} \cdot \vec{e}_r) - \Omega_{\oplus}}{r_{\oplus}}$$

sehen. Dies führt wegen $\vec{e}_A = \vec{e}_z$ zu dem Lense-Thirring Beitrag

$$(\vec{\nabla} \times \vec{h}) \cdot \vec{e}_z \sim \frac{\Omega_{\oplus}}{r_{\oplus}} (1 - 3 \cos^2 \theta_0) .$$

Wir halten fest, daß dieser Effekt nur von der Rotation der Erde und

nicht von der Bewegung des Gyroskops abhängt. Es ist dies also ein Mitnahme-Effekt, der von dem Lense-Thirring-Feld der rotierenden Erde herrührt.

Der T_{α_1} Beitrag in Gl. (3.40) schließlich hängt von der Existenz von bevorzugten Bezugssystemen ab. In Einsteins Theorie jedoch sind alle Systeme gleichwertig und daher verschwindet der Effekt in dieser Theorie. Die Ni-Kosmologie dagegen geht von der Existenz eines Ruhesystems aus und wir finden somit in dieser Theorie einen von Null verschiedenen Beitrag. Da in Einstein's Theorie dieser Effekt nicht vorhanden ist, läßt sich kein elektrodynamisches Analogon angeben, mit der man die Form von T_{α_1} verstehen könnte.

IV. Quantenfluktuationen in einem Ring-Laser Gyroskop mit Zitterantrieb

4.1 Allgemeine Einleitung

4.1.1 Einleitung und Überblick über die Ergebnisse des Kapitel IV

Die Überlegungen des letzten Kapitels haben gezeigt, daß Ring-Laser-Gyroskope prinzipiell geeignet sind, Vorhersagen der allgemeinen Relativitätstheorie zu überprüfen. Es stellt sich jedoch die Frage, ob die dabei auftretenden Frequenzverschiebungen gegenwärtig von einem Ring-Laser-Gyroskop mit der erforderlichen Genauigkeit gemessen werden können und wenn nicht, ob dessen Genauigkeit, zumindest im Prinzip, beliebig gesteigert werden kann. Eine solche Schranke für die Empfindlichkeit könnte z.B. das Quantenrauschen durch die spontane Emission der Laseratome darstellen. Tatsächlich hat die neue Generation der Ring-Laser-Gyroskope eine Empfindlichkeit erreicht, die nur noch durch das Quantenrauschen begrenzt wird⁸⁵. Während nämlich alle Arten von mechanischem Rauschen (Vibrieren der Laserspiegel u.s.w.) durch "trickreiche" experimentelle Methoden umgangen werden können, ist das Quantenrauschen prinzipiell vorhanden, da es von der Quantisierung des elektrischen Feldes im Resonator herrührt. Daher ist es wichtig, diesen Effekt genau zu untersuchen.

Zu diesem Zweck ist in Ref. 26-29 das Spektrum und die mittlere Schwebungsfrequenz des Schwebungssignals eines Ring-Laser-Gyroskops untersucht worden. In diesen Arbeiten, wie auch in der vorliegenden, sind lediglich Phasenfluktuationen behandelt worden, da diese die Genauigkeit des Gyroskops bestimmen. Intensitätsfluktuationen, die im Detail in Ref. 86 diskutiert worden sind, wurden nicht berücksichtigt. Von besonderem Interesse ist der Einfluß des Quantenrauschens auf den sogenannten Einrastbereich des Ring-Laser-Gyroskops. Damit bezeichnet man den für kleine Rotationsraten unempfindliche Bereich, der von der Rückstreuung an den Laserspiegeln²⁵ herrührt. Dabei koppeln die beiden gegenläufigen Wellen nichtlinear untereinander und die mittlere Schwebungsfrequenz verschwindet für kleine, von Null verschiedene Rotationsraten. Das Gyroskop ist, wie man sagt, in dem

"toten Bereich" eingerastet. Als Hauptergebnis dieser Arbeiten^{26 29} läßt sich zusammenfassend feststellen, daß durch das Quantenrauschen der Übergang vom toten zum freien Bereich nicht mehr scharf ist und der tote Bereich kleiner wird.

Das Ziel in der Ring-Laser-Gyroskop Technologie ist natürlich, den toten Bereich so klein als möglich zu machen, oder ihn ganz zum Verschwinden zu bringen. Zu diesem Zweck überlagert man der zu messenden Rotationsrate eine bekannte, äußere (zeitlich periodische) Rotationsrate so, daß das Gyroskop die meiste Zeit außerhalb des toten Bandes verbringt. Das Gyroskop wird sozusagen "gezittert". Daher spricht man in diesem Zusammenhang auch oft von einem gezitterten Gyroskop oder Gyroskop mit Zitterantrieb (engl. dithered gyro)⁸⁷. Diese Art von Ring-Laser-Gyroskop wird als Navigationsinstrument in Flugzeugen und U-Booten verwendet. Daher ist es von besonderem Interesse die Betrachtungen aus Ref. 26-29 auf solche Gyroskope auszudehnen. Dabei werden wir uns auf die Berechnung der mittleren Schwebungsfrequenz beschränken und nicht das Spektrum betrachten*. Hierfür werden wir sowohl approximative als auch exakte Ausdrücke in Form von unendlichen Kettenbrüchen angeben. Beide Methoden werden sehr durch eine Transformation (siehe Gl. (4.29)) der fundamentalen Rekursionsformel erleichtert. Anderenfalls treten, wie auch schon bei einem ähnlich gelagerten Problem in Ref. 89 gefunden wurde, bei der numerischen Auswertung "unüberwindbare" Probleme auf.

Wir geben jetzt einen Überblick über Kapitel IV. Wir beginnen mit einem kurzen Abriß der Ring-Laser Theorie: Abschnitt 4.2.1 behandelt das deterministische Verhalten des Gyroskops und erläutert sein Einrasten. In 4.2.2 fassen wir wichtige Ergebnisse aus Ref. 26-29 zusammen, die den Einfluß des Quantenrauschens auf die Einrastkurve zeigen. Dabei stellen wir die in der Rauschtheorie gebräuchlichen

* Dies geschieht, um grundsätzliche Probleme zu umgehen. Aus der Langevin Gleichung (4.20) erkennt man nämlich, daß es sich bei dem stochastischen Prozeß um einen nichtstationären Prozeß handelt. Daher kann zur Berechnung des Spektrums nicht das Wiener-Khintchine Theorem³⁰ benutzt werden, sondern es müssen Definitionen eines zeitabhängigen Spektrums⁸⁸ herangezogen werden.

Methoden, die Langevin- und die Fokker-Planck-Methode, einander gegenüber und geben die entsprechenden Gleichungen an. Die Zittermethode wird im Abschnitt 4.3 eingeführt und die Einrastkurve im rauschfreien Fall an Hand von approximativen Methoden⁹⁰ gewonnen. Dies geschieht in Bereichen, in denen die Rotationsrate entweder in der Nähe von oder zwischen ganzzahligen Vielfachen der Zitterfrequenz liegt. Dabei zeigt sich nämlich, daß der Zitterantrieb auf Grund der Nichtlinearität der Bewegungsgleichung für die Phase (Gl. (4.9)) zusätzliche tote Bänder erzeugt, die um ganzzahlige Vielfache der Zitterfrequenz zentriert sind. Die Breite des r -ten toten Bandes ist durch $|bJ_r(\frac{\alpha_0}{\omega_D})|$ gegeben, wobei J_r die r -te Besselfunktion erster Art, b den Rückstreuoeffizienten, α_0 die Zitteramplitude und ω_D die Zitterfrequenz bezeichnen. Diese toten Bänder werden wegen ihrer stufenförmigen Anordnung oft Gyroskop-Stufen genannt. Zwischen diesen Stufen finden wir für die Abweichung der mittleren Schwebungsfrequenz von der Linearität eine Korrektur von der Ordnung $(\frac{b}{\omega_D})^2$.

Im Abschnitt 4.4 geben wir die Langevin- und die zugehörige Fokker-Planck-Gleichung eines Ring-Laser-Gyroskops mit Zitterantrieb an. Letztere führen wir sodann in ein Rekursionsschema über, das den Ausgangspunkt für unsere weiteren Betrachtungen bildet. Die mittlere Schwebungsfrequenz in Anwesenheit von Rauschen $\langle\langle\dot{\phi}\rangle_F\rangle_t$ läßt sich in Koeffizienten dieses Schemas ausdrücken. Im Abschnitt 4.5 bringen wir diese Rekursionsformel auf eine Form, die, wie in 4.6 gezeigt wird, auf schnell konvergierende Matrix-Kettenbrüche führt. Darüber hinaus dient uns diese Form als Ausgangspunkt zur Verallgemeinerung der Näherungsausdrücke für die mittlere Schwebungsfrequenz aus Abschnitt 4.3 auf den Fall mit Rauschen. Es zeigt sich, daß das Quantenrauschen jede der Gyroskop-Stufen in gleicher Weise beeinflusst wie beim ungezitterten Fall: Der Übergang zwischen eingerastetem und freien Bereich ist nicht mehr scharf und wird "ausgeschmiert".

Im Abschnitt 4.6 werden wir schließlich eine exakte Lösung der transformierten Rekursionsformel und damit einen exakten Ausdruck für die mittlere Schwebungsfrequenz in Form von unendlichen Matrix-Kettenbrüchen gewinnen. Diese Lösung kann völlig unterschiedliche Formen annehmen, die jedoch alle äquivalent sind. Dabei stellt sich heraus, daß nur die Lösung, die aus dem transformierten Schema hervorgeht, auf

schnell konvergierende Matrix-Kettenbrüche führt. Die hieraus resultierenden Ergebnisse werden abschließend im Abschnitt 4.7 diskutiert und mit den approximativen Ausdrücken aus Abschnitt 4.5 verglichen.

4.1.2 Beziehung zu anderen Arbeiten

Die Methode, das Einrasten des Ring-Laser-Gyroskops durch einen Zitterantrieb zu verhindern, geht auf einen Vorschlag von J. Killpatrick zurück⁸⁷. Er hat zum erstenmal die Bewegungsgleichung für die Phasenverschiebung zwischen den beiden gegenläufigen Wellen (Gl. (4.9)) numerisch gelöst⁹¹. Die resultierende Einrastkurve ist auch in Ref. 92 diskutiert. Die zusätzlichen toten Bänder bei ganzzahligen Vielfachen der Zitterfrequenz und deren Breite im rauschfreien Fall wurden von Hutchings und Stjern³¹ untersucht. Deren mathematische Ableitung ergibt zwar das richtige Ergebnis, erscheint jedoch inkonsistent. Auch können deren Argumente nicht auf den Fall mit Rauschen übertragen werden. Darüber hinaus zeigen Hutchings und Stjern in dieser Arbeit die Einrastkurve eines Ring-Laser-Gyroskops mit Zitterantrieb im rauschfreien Fall, die sie durch numerische Integration der Bewegungsgleichung (4.9) gewonnen haben. Dabei waren, wie die Autoren schreiben³¹, "Hunderte von Computer-Durchläufen notwendig, um die Ergebnisse zu erhalten, die in dieser Arbeit vorgestellt werden." Die Stärke der Methode, die in der vorliegenden Arbeit näher ausgeführt wird, liegt in der Tatsache, daß wir einen exakten Ausdruck für die mittlere Schwebungsfrequenz auch in Anwesenheit von Rauschen gefunden haben. Für den rauschfreien Fall haben wir früher in Ref. 36 eine andere Methode vorgeschlagen, bei der die nichtlineare Bewegungsgleichung erster Ordnung auf eine lineare zweite Ordnung mit periodischen Koeffizienten (Hill-Gleichung) transformiert wird. Vermöge des Floquet-Theorems lassen sich sodann die Gebiete der Stabilität bzw. der Instabilität der Lösungen und somit die eingerasteten und freien Bereiche bestimmen. Diese Methode, die nur für den rauschfreien Fall gültig ist, wurde unabhängig von uns auch von S. Stenholm und A. Bambini⁹³ entwickelt und benutzt.

Langevin-Gleichungen von der hier diskutierten Art spielen auch in anderem Zusammenhang eine Rolle⁹⁴, so zum Beispiel beim Wechselstrom-

Josephson-Effekt. Dabei ist die Beziehung zwischen mittlerer Schwebungsfrequenz und Rotationsrate der Strom-Spannungs-Charakteristik einer Josephson-Brücke analog.

Die zusätzlichen toten Bänder beim Gyroskop entsprechen hier den Sprüngen der Spannung als Funktion des Josephson-Stromes. Diese Sprünge wurden zum erstenmal in Ref. 95 abgeleitet und experimentell von Saphiro⁹⁶ beobachtet.

In Ref. 97 werden sowohl Analogrechner-Studien als auch Näherungsmethoden benutzt, um die Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Phase im Josephson-Effekt zu lösen. Jedoch sind diese Methoden nur auf den rauschfreien Fall begrenzt. Außerdem sollte man darauf hinweisen, daß beim Wechselstrom-Josephson-Effekt die Amplitude des Wechselstroms gewöhnlich kleiner ist als die des Gleichstroms, während beim Ring-Laser-Gyroskop genau das Gegenteil der Fall ist; die Zitteramplitude ist viel größer als die zu messende Rotationsrate. Daher können die Näherungsverfahren, die aus dem Josephson-Effekt bekannt sind, nicht übertragen werden.

Frequenzanpassung bei Vielfachen der Antriebsfrequenz ist wohlbekannt aus der Radiophysik. Dort nennt man diesen Effekt "Mitnahme-" oder "Mitzieh-Effekt". Jedoch können wiederum die auf Störungstheorie begründeten Methoden, die so erfolgreich von Erdélyi⁹⁸ auf "Kondensatorkreise mit veränderlicher Kapazität" angewendet wurden, nicht auf das Ring-Laser-Gyroskop mit Zitterantrieb übertragen werden: Da die Werte der Parameter in gänzlich anderen Bereichen liegen, ist die Konvergenz der Störungsreihe nicht gesichert.

Eine Methode, um Fokker-Planck-Gleichungen mit periodisch zeitabhängigen Drifttermen zu lösen, wurde in Ref. 94 erläutert und in Ref. 89 auf eine Fokker-Planck-Gleichung angewendet, die der in dieser Arbeit behandelten sehr ähnlich ist. Die in Ref. 89 berechneten Größen stehen zwar mit denen des Ring-Laser-Gyroscopes in engem Zusammenhang, jedoch liegen die Werte der Parameter wiederum in einem anderen Bereich. In dem für das gezitterte Ring-Laser-Gyroskop interessanten Bereich führt diese Methode auf enorme numerische Probleme mit nichtkonvergierenden Matrix-Kettenbrüchen. Wir werden zeigen, daß erst die Transformation (4.29) diese Schwierigkeiten beseitigen kann.

4.2 Ring-Laser Theorie: eine Wiederholung

In diesem Abschnitt wiederholen wir, den Ref. 24 und 26 folgend, das bekannte Einrastverhalten eines Ring-Laser-Gyroscopes und erläutern den Einfluß von Quantenrauschen auf die Einrastkurve des Gyroscopes an Hand der zugehörigen Langevin- und Fokker-Planck-Gleichung.

4.2.1 Deterministisches Verhalten des Ring-Laser-Gyroscopes

Ein Ring-Laser ist ein Ringresonator bestehend aus drei oder mehr Spiegeln, wobei sich das Lasermedium innerhalb des Resonators befindet²⁴. Die Spiegel sind so justiert, daß sich laufende Wellen ausbilden können. In vielen Anwendungen hat man zwei gegenläufige elektrische Wellen. Rotiert der Ring-Laser mit der konstanten Rotationsfrequenz Ω um eine Achse senkrecht zur Ebene des Ring-Lasers, so ergibt sich eine Frequenzverschiebung zwischen den beiden gegenläufigen Wellen, die durch die im Abschnitt 3.5.2 diskutierte Sagnac-Frequenz²¹ gegeben ist.

$$\dot{\phi} = \frac{4A\Omega}{\lambda L} \equiv a$$

Dabei bezeichnen A die vom Licht umschlossene Fläche, $\lambda = \frac{\lambda}{2\pi}$ die reduzierte Wellenlänge und L die Resonatorlänge. Außerdem haben wir als Abkürzung die Größe a eingeführt, die proportional zur Rotationsfrequenz Ω ist. Im Weiteren werden wir nicht mehr zwischen Ω und a unterscheiden, sondern werden nur noch die Größe a als Rotationsrate bezeichnen.

Um die Frequenzverschiebung $\dot{\phi}$ zu messen, blendet man mittels eines Strahlteilers einen Prozentsatz der beiden gegenläufigen Wellen aus und bringt sie wieder zu Überlagerung²⁵. Ein Detektor mißt das resultierende Schwebungssignal und bestimmt hieraus die Schwebungsfrequenz. Dabei mittelt er über hohe (optische) Frequenzen, d.h. er mißt die mittlere Schwebungsfrequenz.

$$\langle \dot{\phi} \rangle_t \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T dt \dot{\phi} \right\}.$$

Figur 7 zeigt ein Ring-Laser-Gyroskop mit einer solchen sog. heterodyn Meßmethode. Auf Grund des linearen Zusammenhangs zwischen der mittleren Schwebungsfrequenz $\langle \dot{\phi} \rangle_t$ und der Rotationsrate a ist ein Ring-Laser-Gyroskop geeignet, Rotationen eines Systems durch Frequenzmessung nachzuweisen. Experimente mit Ring-Laser-Gyroskopen haben jedoch gezeigt, daß diese Linearität nicht erfüllt ist. Es ist

vielmehr notwendig, den Effekt der Reflexion der Strahlung an den Spiegeln des Resonators oder an Schmutzteilchen - d.h. Rückstreuung -, aber auch lokale Spiegeldefekte zu berücksichtigen. Diese Effekte übertragen Strahlung von einer Ausbreitungsrichtung auf die andere, verursachen also eine Kopplung zwischen den beiden gegenläufigen Wellen. Mathematisch kann diese Kopplung durch verschiedene Modelle²⁵ beschrieben werden⁺), die alle auf die folgende Bewegungsgleichung für die Phasendifferenz zwischen den beiden gegenläufigen Wellen führen

$$\dot{\phi} = a + b \sin \phi . \quad (4.1)$$

Dabei bezeichnet b den Rückstreuoeffizienten. Ein typischer Wert hierfür ist $b \cong 0.1$ °/h. Durch Trennung der Variablen läßt sich jetzt die mittlere Schwebungsfrequenz bestimmen und wir finden⁷⁸

$$\langle \dot{\phi} \rangle_t = \begin{cases} 0 & |a| \leq b \\ \sqrt{a^2 - b^2} & |a| \geq b \end{cases} \quad (4.2)$$

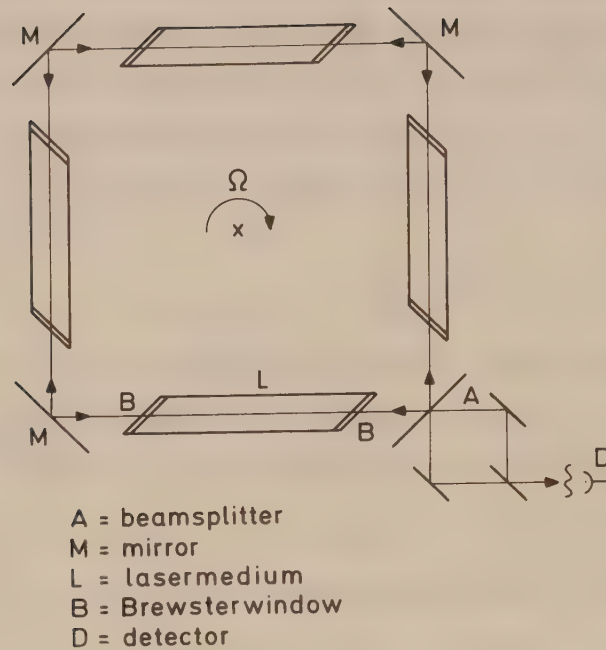
und

$$\langle \dot{\phi} \rangle_t (-a) = - \langle \dot{\phi} \rangle_t (a) .$$

Dies zeigt, daß auf Grund der nichtlinearen Kopplung die mittlere Schwebungsfrequenz für kleine, von Null verschiedene Rotationsraten verschwindet. Beide Wellen haben trotz der Rotation des Ring-Lasers dieselbe Frequenz. Diese Frequenz-Synchronisation⁺⁺) wird als Einrasten (engl. locking) des Gyroskops bezeichnet. Das Einrasten des Gyroskops geschieht für Rotationsraten, die kleiner als der Rückstreuoeffizient sind. Diesen Bereich, in dem das Gyroskop für Rotation unempfindlich ist, nennt man das tote Band. Für Rotationsraten a , für die $|a| \gg b$ gilt, finden wir aus Gl. (4.2) wiederum einen linearen Zusammenhang. Figur 8 zeigt die Einrastkurve eines Ring-Laser-Gyroskops, d.h. die mittlere Schwebungsfrequenz als Funktion der Rotationsrate im Vergleich mit dem idealen (linearen Fall).

⁺) In Ref. 26 wird diese Kopplung durch eine dünne Schicht mit linearer (komplexer) Suszeptibilität beschrieben und Gl. (4.1) abgeleitet.

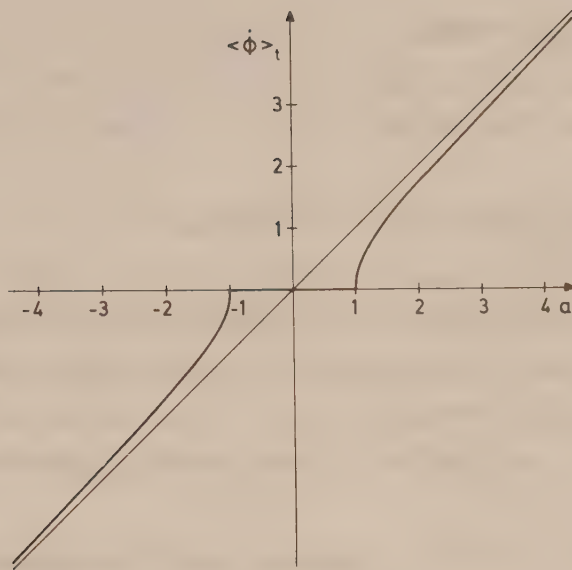
⁺⁺) Zum erstenmal wurde eine solche Frequenzanpassung von Huygens bei der schwachen Kopplung zweier Pendel beobachtet⁹⁹.



Figur 7: Ring-Laser-Gyroskop mit heterodyner Messung des Schwebungssignals

4.2.2 Quantenrauschen im ungezitterten Gyroskop

Im Abschnitt 4.2.1 haben wir das Einrastverhalten des Ring-Lasers diskutiert. Diese Ergebnisse basieren auf der Bewegungsgleichung (4.1) für die relative Phase zwischen den beiden Wellen, zu deren Ableitung in Ref. 100 die halbklassische Lasertheorie³⁸ benutzt wurde, die das aktive Medium quantenmechanisch, die elektrische Feldstärke innerhalb des Resonators jedoch als klassische Variable behandelt. Durch die zweite Quantisierung wird diese ebenfalls zum Operator. Eine Folge davon ist das Auftreten von spontaner Emission, bei der ein angeregtes Atom spontan ein Photon aussendet. Dieses elektrische Feld mit statistisch verteilter Phase überlagert sich mit dem im Resonator vorhandenen Feld, so daß das elektrische Feld zu einer stochastischen Größe



Figur 8: Einrastverhalten des Laser-Gyros

wird. Seine Phase und Amplitude⁸⁶ unterliegt ständigen Schwankungen, d.h. es tritt Rauschen auf¹⁰¹. Somit ist die Phase ϕ zwischen den beiden gegenläufigen Wellen nicht länger deterministisch, sie ist ebenfalls eine stochastische Variable. Dies ist im Zusammenhang mit Ring-Laser-Gyroskopen besonders wichtig, da dort ja gerade die Phasen- bzw. Frequenzdifferenz gemessen wird. Der Effekt des Rauschens auf die Phase ϕ läßt sich durch Addition eines Rauschterms $F = F(t)$ in Gl. (4.1) beschreiben²⁷

$$\dot{\phi} = a + b \sin \phi + F(t) \quad +) \quad (4.3)$$

+) Eine erste Diskussion dieser Langevin-Gleichung findet sich in Ref. 102. Langevin-Gleichungen von dieser Art kommen auch im Zusammenhang mit anderen physikalischen Problemen²⁷ vor: Laser mit angestrahlem Signal, Josephson-Effekt, Selbsteinrasten des Lasers und in der Radiotechnik.

Man nimmt weiter an, daß das Rauschen einer Gauß-Statistik genügt. Dann ist diese durch den Ensemble-Mittelwert

$$\langle F(t) \rangle_F = 0 \quad (4.4)$$

und die Korrelationsfunktion erster Ordnung

$$\langle F(t) F(s) \rangle = 2 D \delta(t-s) \quad (4.5)$$

vollständig bestimmt, wobei die Diffusionskonstante D durch $D = \nu/2Q\bar{n}$ gegeben ist (ν bezeichnet die Frequenz des Lichts, Q die Güte des Resonators und $\bar{n}$ die mittlere Photonenzahl)¹⁰³. Ein typischer Wert für D ist $D = 10^{-3}$ 1/sec.¹⁰³. Das Symbol $\langle \rangle_F$ bedeutet den Ensemble-Mittelwert.

Von Interesse ist jetzt, inwiefern das Rauschen die Einrastkurve des Gyroskops beeinflusst. Dazu muß die mittlere Schwebungsfrequenz noch über die Statistik von F gemittelt, d.h. $\langle \dot{\phi} \rangle_F$ berechnet werden. Im wesentlichen stehen dazu zwei verschiedene Methoden zur Verfügung: die Langevin- und die Fokker-Planck-Methode⁹⁴.

In der Langevin-Methode löst man zunächst die Bewegungsgleichung (4.3) in Integralen über die stochastische Kraft F , setzt diese Lösung wieder in Gl. (4.3) - d.h. in $\sin \phi$ - ein und führt sodann die Mittelung über die Statistik von F aus, wobei man die Eigenschaften (4.4) und (4.5) benutzt. Diese Methode läßt sich jedoch nur in bestimmten Teilbereichen der Rotationsrate a anwenden, dann nämlich, wenn Gl. (4.3) linearisiert werden kann. Eine Lösung der vollen nichtlinearen Bewegungsgleichung (4.3) in Integralen von F ist nicht bekannt. Daher führt die Langevin-Methode nicht zum Ziel.

Besser geeignet ist dagegen die Fokker-Planck-Methode. Man wandelt die Gleichung um in eine partielle Differentialgleichung für die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(t, \phi | t_0, \phi_0)$, die Wahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt t die Phase ϕ vorzufinden, falls diese zum Zeitpunkt t_0 den Wert ϕ_0 hatte. Diese Methode ist vorteilhafter, da sich viele Fokker-Planck-Gleichungen exakt in Form von unendlichen (Matrix)Kettenbrüchen lösen lassen, einer Methode, die von H. Risken und Mitarbeiter⁹⁴ entwickelt wurde. Die zur Langevin-Gleichung (4.3) gehörige Fokker-Planck-Gleichung lautet, wie in Ref. 26, 27 gezeigt,

$$\frac{\partial P}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial \phi} [(a + b \sin \phi) P] + D \frac{\partial^2 P}{\partial \phi^2} . \quad (4.6)$$

Da ϕ die relative Phase zwischen den beiden gegenläufigen Wellen beschreibt, sind periodische Randbedingungen die für das Problem angemessenen Randbedingungen.

Die Mittelung über F nehmen wir im stationären Zustand* vor. Dabei bezeichnet $P_s = P_s(\phi)$ die stationäre Lösung ($\frac{\partial P}{\partial t} \equiv 0$) der Fokker-Planck-Gleichung (4.6). Wir finden so für die mittlere Schwebungsfrequenz in Anwesenheit von Rauschen

$$\langle \dot{\phi} \rangle_{F,t} = a + b \langle \sin \phi \rangle_F ,$$

wobei der Mittelwert $\langle \sin \phi \rangle_F$ durch

$$\langle \sin \phi \rangle_F = \int_0^{2\pi} d\phi \sin \phi P_s(\phi)$$

gegeben ist.

Die Größe $P_s(\phi)$ läßt sich direkt aus Gl. (4.6) durch Integration bestimmen. Für die numerische Auswertung ist es jedoch von Vorteil, einen Ausdruck in Form von unendlichen Kettenbrüchen anzugeben, da dann $\langle \dot{\phi} \rangle_{F,t}$ sehr einfach zu berechnen ist. In Ref. 28 wurde dies ausgeführt. Da wir die mittlere Schwebungsfrequenz des Ring-Laser-Gyroskops mit Zitterantrieb mit dem ungezitterten Fall vergleichen werden, geben wir das Ergebnis hier an.

$$\langle \dot{\phi} \rangle_{F,t} = a - b \operatorname{Im} S_1 , \quad (4.7)$$

wobei der unendliche Kettenbruch durch

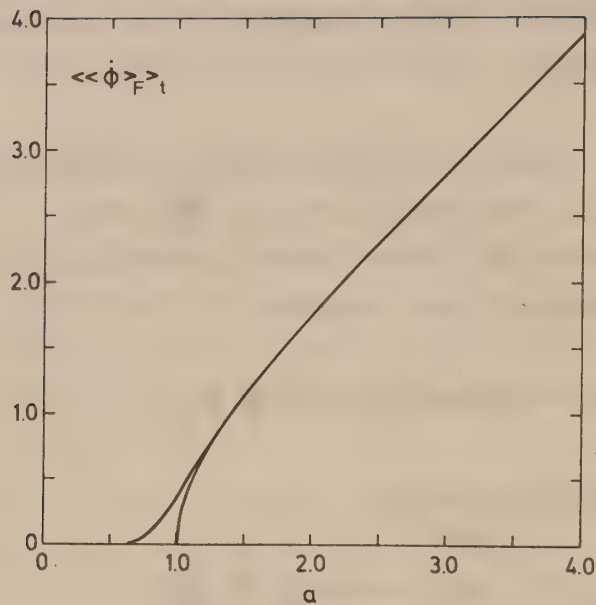
$$S_n = \frac{b/2}{-(ia + nD) + \frac{b}{2} S_{n+1}} \quad (4.8)$$

bestimmt ist.

Figur 9 zeigt die mittlere Schwebungsfrequenz $\langle \dot{\phi} \rangle_{F,t}$ als Funktion der Rotationsrate a im Vergleich mit der Kurve für den rauschfreien Fall. Man sieht, daß auf Grund des Rauschens der tote Bereich des Gyroskops

* Man kann zeigen, daß gilt:

$$P(t \rightarrow \infty, \phi / t_0, \phi_0) = P_s(\phi)$$



Figur 9: Mittlere Schwebungsfrequenz $\langle\langle\dot{\phi}\rangle\rangle_{F_t}$ als Funktion der Rotationsrate im Vergleich mit der rauschfreien Einrastkurve ($b = 1$, $D = 10^{-1}$).

nicht mehr scharf definiert ist. Der Ring-Laser geht stetig vom toten zum freien Bereich über. Die Einrastkurve, die im rauschfreien Fall nicht stetig differenzierbar ist, wird "ausgeschmiert" und damit differenzierbar. Dies verkleinert effektiv den toten Bereich. Für große Rotationsfrequenzen ($a \gg b$) bleibt die Einrastkurve vom Rauschen unbeeinflusst²⁸.

4.3 Die Zittermethode ohne Rauschen

In diesem Abschnitt werden wir die sogenannte Zittermethode erläutern und die Einrastkurve eines Ring-Laser-Gyroskops mit Zitterantrieb im rauschfreien Fall diskutieren. Wir folgen dabei im wesentlichen dem dritten Kapitel von Ref. 24.

Eine naheliegende Idee, um das tote Band (z.B. durch Rauschen) zu verkleinern, ist, eine externe konstante Rotationsrate der zu messenden so zu überlagern, daß der Laser aus dem toten Band hinaus in den freien Bereich kommt, d.h.

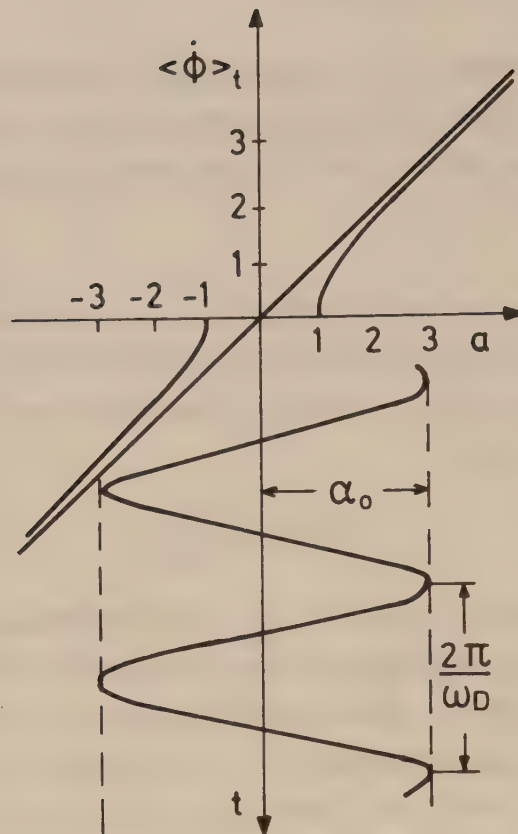
$$a \rightarrow a + \alpha_{\text{ext}}$$

wobei für die externe Rotationsrate α_{ext} die Beziehung $\alpha_{\text{ext}} \gg b$ gelten sollte. Diese Methode bringt jedoch neue Probleme mit sich, da die externe Rate α_{ext} mit größerer Genauigkeit bekannt sein muß als die zu messende und über die ganze Meßdauer konstant gehalten werden muß. Diese Probleme treten nicht auf, wenn statt der konstanten äußeren Rotationsrate α_{ext} eine sinusförmige benutzt wird, da sich dann die Schwankungen in α_{ext} herausmitteln. Bei dieser Methode wird also das Gyroskop sozusagen "gezittert", daher der Ausdruck "gezittertes Gyroskop" oder "Gyroskop mit Zitterantrieb" (engl. dithered gyro). Der Zitterantrieb geschieht in den meisten Fällen mechanisch⁺ über eine Feder, die dem Gyro eine zusätzliche Rotationsrate $\alpha_0 \cos \omega_D t$ erteilt. Dabei bezeichnen α_0 die Zitteramplitude und ω_D die Zitterfrequenz. Figur 10 verdeutlicht, wie α_0 und ω_D relativ zur Breite des toten Bandes b gewählt werden müssen, um das Einrasten des Gyroskops möglichst gut zu verhindern. Um sicherzustellen, daß der Laser im freien Bereich arbeitet, muß gelten

$$b \ll \alpha_0.$$

Außerdem soll sich der Laser nur kurze Zeit im toten Bereich aufhalten.

⁺) Ein Vorteil des optischen Kreisel (Ring-Laser-Gyroskops) gegenüber dem mechanischen besteht in dem Fehlen von beweglichen Teilen. Dieser Vorteil geht jedoch bei einem mechanischen Antrieb verloren. Es sind daher optische Methoden von Interesse, die eine Frequenzverschiebung zwischen den Wellen erzeugen, die von der Form $\alpha_0 \cos \omega_D t$ ist. In Ref. 25 und 104 wurde gezeigt, daß der optische Faraday-Effekt und Pumpen einer Mode eines Viermoden-Ring-Lasers solche zeitlich periodischen Frequenzverschiebungen induziert.



Figur 10: Einrastkurve des ungezitterten Gyroskops mit überlagertem Zitterantrieb

Dies liefert die Bedingung⁸⁷

$$b \ll \omega_D.$$

Diese Zittermethode wird in allen kommerziellen Gyroskopen angewendet. Typische Werte für die Parameter b , α_0 und ω_D sind dabei $b = 0.1^\circ/\text{sec}$, $\alpha_0 = 100 \text{ kHz}$ und $\omega_D = 400 \text{ Hz}$,²⁴.

Wir werden jetzt untersuchen, inwiefern der Zitterantrieb die Einrast-Charakteristik des Gyroskops ändert. Wir beschränken uns dabei auf den rauschfreien Fall⁹⁰. Die Bewegungsgleichung für die Phasendifferenz ϕ zwischen den beiden gegenläufigen Wellen lautet

$$\dot{\phi} = a + b \sin \phi + \alpha_0 \cos \omega_D t \quad (4.9)$$

Zur Lösung dieser Gleichung machen wir den Ansatz

$$\phi = at + \frac{\alpha_0}{\omega_D} \sin \omega_D t + \varphi(t) \quad (4.10)$$

und finden sofort die folgende Differentialgleichung für die unbekannte Funktion φ

$$\dot{\varphi} = b \sin \left[at + \frac{\alpha_0}{\omega_D} \sin \omega_D t + \varphi \right] \quad (4.11),$$

die sich unter Benutzung der Fourier-Bessel-Entwicklung¹⁰⁵

$$e^{ix \sin \beta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x) e^{im\beta} \quad (4.12)$$

auf die Form

$$\dot{\varphi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b J_m \left(\frac{\alpha_0}{\omega_D} \right) \sin \left[(a + m\omega_D)t + \varphi(t) \right] \quad (4.13)$$

bringen läßt. Das Symbol $J_m(x)$ bezeichnet dabei die Besselfunktion der ersten Art von der Ordnung m . Mittels Gl. (4.13) werden wir jetzt die mittlere Schwebungsfrequenz in zwei Teilbereichen von a diskutieren, nämlich

1. Rotationsrate a nahe einem ganzzahligen Vielfachen der Zitterfrequenz ω_D , d.h.

$$a = r\omega_D + \tilde{a} \text{ mit } |\tilde{a}| \ll \omega_D$$

2. Rotationsrate a in großem Abstand zwischen zwei ganzzahligen Vielfachen der Zitterfrequenz ω_D , d.h.

$$|a - r\omega_D| \ll \omega_D$$

wobei $r = \dots - 2, -1, 0, +1, +2 \dots$

Wir beginnen mit dem ersten Fall, setzen $a = r\omega_D + \tilde{a}$ mit $|\tilde{a}| \ll \omega_D$ und definieren

$$\psi(t) \equiv \tilde{a}t + \varphi(t) \quad (4.14)$$

Damit wird Gl. (4.13) zu

$$\dot{\psi}(t) = \tilde{a} + b J_{-r}\left(\frac{\alpha_0}{\omega_D}\right) \sin \psi + b \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{m+r}\left(\frac{\alpha_0}{\omega_D}\right) \sin[m\omega_D t + \psi] \quad (4.15)$$

Gleichung (4.14) zeigt, daß sich die Phase ψ mit der Zeit langsam ändert, verglichen mit $e^{i\omega_D t}$, da wir $|\tilde{a}| \ll \omega_D$ angenommen haben und aus Gl. (4.11) $|\dot{\phi}| \sim b \ll \omega_D$ folgt. Mitteln wir daher Gl. (4.15) über mehrere Zitterperioden, so finden wir für die langsam veränderliche Phase $\bar{\psi}$ die Bewegungsgleichung

$$\dot{\bar{\psi}} = \tilde{a} + b J_{-r}\left(\frac{\alpha_0}{\omega_D}\right) \sin \bar{\psi}, \quad (4.16)$$

die an die rauschfreie, ungezitterte Ring-Laser-Gleichung (4.1) erinnert. Durch Vergleich mit Gl. (4.1) und (4.2) können wir daher die mittlere Schwebungsfrequenz sofort angeben

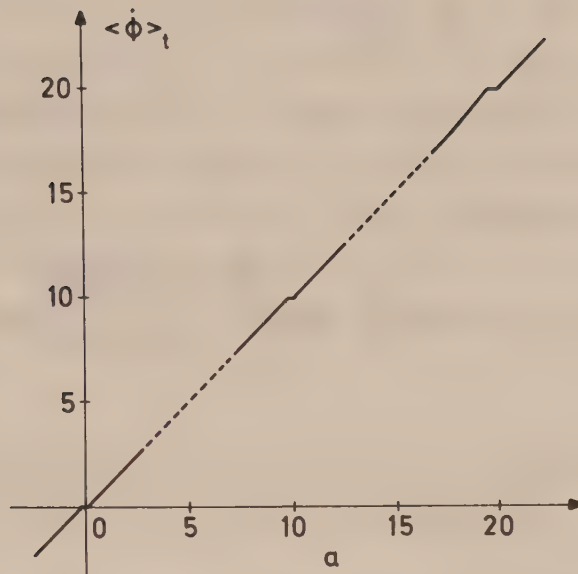
$$\langle \dot{\phi} \rangle_t = \begin{cases} r\omega_D & |\tilde{a}| \leq |b J_{-r}(\frac{\alpha_0}{\omega_D})| \\ r\omega_D \pm \sqrt{\tilde{a}^2 - [b J_{-r}(\frac{\alpha_0}{\omega_D})]^2} & |b J_{-r}(\frac{\alpha_0}{\omega_D})| \leq \tilde{a} \ll \omega_D \end{cases} \quad (4.17)$$

mit $r = \dots -2, -1, 0, +1, +2 \dots$. Dabei haben wir noch einmal Gl. (4.10) und die Zerlegung $a = r\omega_D + \tilde{a}$ benutzt.

Auf Grund der Nichtlinearität der Bewegungsgleichung (4.9) entstehen zusätzliche tote Bänder, die um ganzzahlige Vielfache der Zitterfrequenz zentriert sind. Die Breite des r -ten toten Bandes ist durch $|b J_{-r}(\frac{\alpha_0}{\omega_D})|$ gegeben³¹. Dies ermöglicht z.B., das tote Band um die Rotationsfrequenz Null vollständig zum Verschwinden zu bringen, indem man α_0/ω_D gleich der Nullstelle der nullten Besselfunktion wählt. Dies ist auf Grund von technischen Bedingungen jedoch oft nicht möglich. Da jedoch für $\alpha_0/\omega_D \gg 1$ die asymptotische Entwicklung

$$J_0\left(\frac{\alpha_0}{\omega_D}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega_D}{\alpha_0} \cos\left(\frac{\alpha_0}{\omega_D} - \frac{\pi}{4}\right) \xrightarrow{\alpha_0/\omega_D \rightarrow \infty} 0$$

gilt, kann man durch die Wahl von sehr großen Werten von $\frac{\alpha_0}{\omega_D}$ das tote Band um die Rotationsfrequenz Null beliebig klein machen. Diese Methode wird in allen kommerziellen Gyroskopen verwendet, dabei hat man typisch $\alpha_0/\omega_D \approx 900$. Figur 11 zeigt die zusätzlichen toten Bänder, zentriert um Vielfache der Zitterfrequenz ω_D . Da die Einrastkurve Stufen bekommt, nennt man sie oft "Gyroskop-Stufen". Die Gleichungen (4.14) und (4.15)



Figur 11: Einrastkurve des gezitterten Gyroskops ohne Rauschen. Die "Gyroskop-Stufen" (ausgezogene Linie) sind gemäß Gl. (4.17) berechnet, während zwischen den Stufen (gestrichelte Kurve) Gl. (4.19) benutzt wurde.

machen deutlich, daß die obige approximative Lösung für $\tilde{a} \approx 1/2\omega_D$ zusammenbricht, da dann ψ nicht mehr langsam veränderlich ist und daher Terme aus der unendlichen Summe in Gl. (4.15) Beiträge liefern können. Um dennoch einen Ausdruck für die mittlere Schwebungsfrequenz zu finden, der zwischen zwei "Gyroskop Stufen" gültig ist, müssen wir eine andere Methode anwenden.

Aus Gl. (4.2) wissen wir, daß für das ungezitterte Gyroskop für Rotationsraten $\frac{a}{b} \gg 1$ näherungsweise

$$\langle \dot{\phi} \rangle_t \cong a - \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a} \right)^2 a \quad (4.18)$$

gilt, d.h. die mittlere Schwebungsfrequenz ist nichtlinear von der Ordnung $\left(\frac{b}{a} \right)^2$. Um diese Korrektur auch im gezitterten Fall zu finden, gehen wir von folgender Relation aus,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{b J_m \left(\frac{\alpha_0}{\omega_0} \right)}{a + m \omega_0} \cos [(a + m \omega_0)t + \varphi(t)] \right\} - \dot{\varphi}(t) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{b J_m \left(\frac{\alpha_0}{\omega_0} \right)}{a + m \omega_0} \sin [(a + m \omega_0)t + \varphi] \\ = \dot{\varphi}(t) , \end{aligned}$$

die durch Ausführen der Differentiation der linken Seite auf Gl. (4.13) führt. Setzen wir ϕ aus Gl. (4.13) in den zweiten Term auf der linken Seite der obigen Gleichung ein, so finden wir

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} = \frac{d}{dt} \left\{ - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{b J_m \left(\frac{\alpha_0}{\omega_0} \right)}{a + m \omega_0} \cos [(a + m \omega_0)t + \varphi(t)] \right\} \\ - \frac{b^2}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_m \left(\frac{\alpha_0}{\omega_0} \right) J_n \left(\frac{\alpha_0}{\omega_0} \right)}{a + m \omega_0} \cos [(m-n) \omega_0 t] \\ + \frac{b^2}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_m \left(\frac{\alpha_0}{\omega_0} \right) J_n \left(\frac{\alpha_0}{\omega_0} \right)}{a + m \omega_0} \cos 2 \left[(a + (m+n) \frac{1}{2} \omega_0)t + \varphi(t) \right] . \end{aligned}$$

Durch Mittelung über die Zeit und Benutzung von Gl. (4.10) folgt somit

$$\langle \dot{\phi} \rangle_t \cong a - \frac{b^2}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{J_m^2 \left(\frac{\alpha_0}{\omega_0} \right)}{a + m \omega_0} \quad (4.19)$$

Dabei haben wir den schnellveränderlichen Term $\cos[2((a + \frac{1}{2} \omega_0)t + \varphi)]$ vernachlässigt.

Im Fall $\alpha_0 = 0$ (kein Zitterantrieb) reduziert sich Gl. (4.19) wegen $J_m(0) = \delta_{m0}$ zu Gl. (4.18). Wir bemerken außerdem, daß die Summe für Rotationsraten $a = r\omega_D$ singularär wird. Dies ist ein Hinweis auf die "Gyroskop Stufen". Im Abschnitt 4.5.2 werden wir zeigen, daß in Anwesenheit von Rauschen eine ähnliche Summe entsteht, die Singularität jedoch verschwindet.

Figur 11 zeigt die Einrastkurve eines gezitterten Gyroskops, wie sie durch die approximativen Ausdrücke (4.17) und (4.19) gegeben ist.

4.4 Schwebungsfrequenz in Anwesenheit von Rauschen im Ring-Laser-Gyroskop mit Zitterantrieb

Nachdem wir in Abschnitt 4.3 die Einrastkurve eines rauschfreien Ring-Laser-Gyroskops mit Zitterantrieb diskutiert haben, wollen wir jetzt untersuchen, welchen Einfluß das Quantenrauschen auf das Einrastverhalten hat. Zu diesem Zweck gehen wir in diesem Abschnitt von der Langevin-Gleichung eines Ring-Laser-Gyroskops mit Zitterantrieb aus und führen die zugehörige Fokker-Planck-Gleichung in ein Rekursionschema über, das den Ausgangspunkt für unsere weiteren Untersuchungen bildet.

In einem Ring-Laser-Gyroskop mit Zitterantrieb setzt sich - wie in Abschnitt 4.3 erläutert wurde - die Rotationsrate a aus zwei Anteilen zusammen, nämlich der äußeren, zu messenden Rotationsrate und der Zitterkomponente. Daher muß bei einem Gyroskop mit sinusförmigem Antrieb die Rotationsrate a in Gl. (4.3) durch $a + \alpha_0 \cos\omega_D t$ ersetzt werden. Die zugehörige Langevin-Gleichung lautet somit

$$\dot{\phi} = a + b \sin\phi + \alpha_0 \cos\omega_D t + F(t) \quad (4.20)$$

wobei der Rauschterm F den statistischen Eigenschaften (4.4) und (4.5) genügt. Die dazu äquivalente Fokker-Planck-Gleichung erhalten wir, indem wir in Gl. (4.6) a durch $a + \alpha_0 \cos\omega_D t$ ersetzen.

$$\frac{\partial P}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial \phi} \left[(a + b \sin\phi + \alpha_0 \cos\omega_D t) P \right] + D \frac{\partial^2 P}{\partial \phi^2} \quad (4.21)$$

Da ϕ die relative Phase zwischen den beiden gegenläufigen Wellen ist, fordern wir wiederum periodische Randbedingungen für die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(t, \phi | t_0, \phi_0)$

$$P(t, \phi + 2\pi | t_0, \phi_0) = P(t, \phi | t_0, \phi_0).$$

Zur Lösung von Gl. (4.21) entwickeln wir P in eine Fourierreihe bezüglich ϕ

$$P(t, \phi | t=0, \phi_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(t, \phi_0) e^{in\phi}, \quad (4.22)$$

wodurch wir auch die Periodizitätsbedingung gewährleistet haben.

Damit erhält man aus Gl. (4.21)

$$\begin{aligned} \dot{C}_n(t, \phi_0) = & - [in(a + \alpha_0 \cos \omega_0 t) + n^2 D] C_n(t, \phi_0) \\ & + \frac{nb}{2} [C_{n+1}(t, \phi_0) - C_{n-1}(t, \phi_0)] . \end{aligned} \quad (4.23)$$

Für $n = 0$ finden wir

$$\dot{C}_0(t, \phi_0) = 0$$

d.h. $C_0(t, \phi_0)$ ist zeitlich konstant. Wegen der Normierung der Wahrscheinlichkeitsverteilung auf 1

$$1 = \int_0^{2\pi} d\phi P(t, \phi | t_0, \phi_0)$$

folgt

$$C_0 = \frac{1}{2\pi} . \quad (4.24)$$

Außerdem notieren wir noch die nützliche Beziehung

$$C_n(t, \phi_0) = C_{-n}^*(t, \phi_0) , \quad (4.25)$$

die aus Gl. (4.22) und der Reellwertigkeit von P folgt.

Aus der Langevin-Gleichung (4.20) folgt

$$\dot{\langle \phi \rangle}_F = a + b \langle \sin \phi \rangle_F + \alpha_0 \cos \omega_D t ,$$

da nach Gl. (4.4) das Rauschen F den Mittelwert Null hat. Das Symbol $\langle \rangle_F$ bezeichnet wiederum den Ensemble Mittelwert. Im Gegensatz zu dem in Abschnitt 4.2.2 diskutierten ungezitterten Ring-Laser-Gyroskop existiert wegen des Zitterantriebs $\alpha_0 \cos \omega_D t$ keine stationäre Lösung der Fokker-Planck-Gleichung (4.21), mit der wir den Mittelwert $\langle \sin \phi \rangle_F$ ausführen könnten. Ein Detektor, der das Schwebungssignal mißt, mittelt über die Zeit und somit ist

$$\langle \dot{\phi} \rangle_{F_t} = a + \langle \langle b \sin \phi \rangle_F \rangle_t$$

wobei

$$\langle \langle \sin \phi \rangle_F \rangle_t = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T dt \langle \sin \phi \rangle_F \right\} .$$

Führen wir die Mittelung mit der bedingten Wahrscheinlichkeit $P(t, \phi | t_0, \phi_0)$ gemäß

$$\langle \sin \phi \rangle_F = \int_0^{2\pi} d\phi \sin \phi P(t, \phi | t_0, \phi_0)$$

durch, so finden wir

$$\langle \dot{\phi} \rangle_{F_t} = a + b \int_0^{2\pi} d\phi \sin \phi \langle P(t, \phi | t_0, \phi_0) \rangle_t .$$

Die Mittelung geschieht also nicht mit einer stationären Wahrscheinlichkeitsverteilung, sondern mit der über die Zeit gemittelten bedingten Wahrscheinlichkeit. Wir werden später sehen, daß dabei die Abhängigkeit von t_0 und ϕ_0 verschwindet. Benutzen wir noch die Fourierentwicklung von P Gl. (4.22) und die Symmetriebeziehung (4.25), so finden wir für die mittlere Schwebungsfrequenz in Abwesenheit von Rauschen die Gleichung

$$\langle \dot{\phi} \rangle_{F_t} = a - 2\pi \text{Im} \langle C_1 \rangle_t \quad (4.26)$$

4.5 Approximative Ausdrücke für die mittlere Schwebungsfrequenz in Anwesenheit von Rauschen

In Abschnitt 4.6 werden wir einen exakten Ausdruck für $\langle\langle\dot{\phi}\rangle_F\rangle_t$ in Form von unendlichen Matrix-Kettenbrüchen ableiten. Dieser Ausdruck ist für die numerische Auswertung von großem Vorteil, macht es jedoch schwierig, die Abhängigkeit der mittleren Schwebungsfrequenz von der Rotationsfrequenz zu verstehen. Daher sind approximative, analytische Ausdrücke für $\langle\langle\dot{\phi}\rangle_F\rangle_t$ nützlich, die dann mit der exakten Matrix-Kettenbruch-Methode getestet werden können.

Solche approximativen Lösungen können in den folgenden Teilbereichen der Rotationsrate a angegeben werden.

1. Rotationsrate a ist in der Nähe eines ganzzahligen Vielfachen der Zitterfrequenz ω_D , d.h.

$$a = r\omega_D + \tilde{a} \quad \text{mit} \quad |\tilde{a}| \ll \omega_D$$

2. Rotationsrate a ist in großem Abstand zu zwei Vielfachen der Zitterfrequenz ω_D , d.h.

$$|a - r\omega_D| \gtrsim \omega_D$$

mit $r = \dots - 2, -1, 0, +1, +2, \dots$

In beiden Fällen nehmen wir schwaches Rauschen und eine hohe Zitterfrequenz an, d.h.

$$D \ll b \ll \omega_D. \quad (4.27)$$

Diese Bedingung ist, wie in den Abschnitten 4.2 und 4.3 ausgeführt wurde, in herkömmlichen Gyroskopen erfüllt.

4.5.1 "Gyroskop Stufen": Rotationsrate in der Nähe eines ganzzahligen Vielfachen der Zitterfrequenz

Setzen wir die Rotationsrate a in der Form

$$a = r\omega_D + \tilde{a}$$

mit $r = \dots -2, -1, 0, +1, +2, \dots$ in das Rekursionsschema (4.23) ein,
so folgt

$$\begin{aligned} \dot{C}_n &= -in[r\omega_D + \alpha_0 \cos\omega_D t] C_n \\ &\quad - (in\tilde{a} + n^2 D) C_n + \frac{nb}{2} C_{n+1} - \frac{nb}{2} C_{n-1} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Die Transformation⁺⁾

$$\tilde{C}_n \equiv e^{in(r\omega_D t + \frac{\alpha_0}{\omega_D} \sin\omega_D t)} C_n \quad (4.29)$$

bringt so das Schema (4.28) auf die Form

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{C}}_n &= - (in\tilde{a} + n^2 D) \tilde{C}_n \\ &\quad + \frac{nb}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{m-r}\left(\frac{\alpha_0}{\omega_D}\right) \left[e^{-im\omega_D t} \tilde{C}_{n+1} - e^{im\omega_D t} \tilde{C}_{n-1} \right] \end{aligned} \quad (4.30)$$

Dabei haben wir die bekannte Fourier-Bessel-Entwicklung (4.12) benutzt.
In der Ableitung von Gl. (4.30) sind keine Näherungen gemacht worden,
und im Abschnitt 4.6 wird die obige Gleichung exakt gelöst werden. In
diesem Kapitel jedoch wollen wir uns auf eine approximative Lösung
beschränken.

⁺⁾ Durch Einsetzen von Gl. (4.29) in die Fourier-Entwicklung von P
Gl. (4.22) überzeugt man sich leicht, daß diese Transformation
analog zum Ansatz (4.10) und (4.14) ist, d.h.

$$\phi = r\omega_D t + \frac{\alpha_0}{\omega_D} \sin\omega_D t + \psi$$

Dabei haben wir die neue stochastische Variable ψ eingeführt.

Dazu halten wir zunächst fest, daß das System zwei charakteristische Zeiten enthält, nämlich die Dämpfungszeit $\tau_F = 1/D$ (herrührend von den Quantenfluktuationen) und die Zitterperiode $\tau_D = 2\pi/\omega_D$. Da wegen (4.27) $D \ll \tau_D$ gilt, folgt $\tau_D \ll \tau_F$. Dies legt nahe, den Zeitmittlungsprozeß in zwei Schritten zu vollziehen, nämlich zunächst über die schnellen Oszillationen des Zitterantriebs zu mitteln und dann den langsam veränderlichen Beitrag, herrührend vom Quantenrauschen, zu berücksichtigen.

Zuvor jedoch halten wir fest, daß die freie Entwicklung von $\tilde{c}_n$ (d.h. $b = 0$, Vernachlässigung der Kopplung zu $\tilde{c}_{n+1}$ und $\tilde{c}_{n-1}$) durch

$$\tilde{c}_n \sim e^{-(in\tilde{a} + n^2 D)t}$$

gegeben ist. Dies zeigt, daß für $n|\tilde{a}| \ll \omega_D$ der Koeffizient $\tilde{c}_n$ verglichen mit $e^{i\omega_D t}$ langsam veränderlich ist. Aus Gl. (4.26) und (4.29) folgt, daß zur Berechnung der mittleren Schwebungsfrequenz nur der Koeffizient $\tilde{c}_1$ benötigt wird. Daher muß die obige Ungleichung nur für kleine n erfüllt sein, insbesondere $n = 1$.

Somit finden wir näherungsweise

$$\langle e^{i\omega_D t} \tilde{c}_n(t) \rangle_{\tau_D} \equiv \frac{1}{\tau_D} \int_t^{t+\tau_D} dt' e^{i\omega_D t'} \tilde{c}_n(t') \approx \tilde{c}_n(t) \delta_{s,0} \quad (4.31)$$

wodurch sich Gl. (4.30) auf das Schema

$$\dot{\tilde{c}}_n = -(in\tilde{a} + n^2 D)\tilde{c}_n + \frac{nb}{2} \int_{-r}^r \left(\frac{\alpha_0}{\omega_D}\right) (\tilde{c}_{n+1} - \tilde{c}_{n-1}) \quad (4.32)$$

reduziert. Im stationären Zustand erhalten wir das folgende Dreitermrekursionsschema

$$0 = -(i\tilde{a} + nD)\tilde{c}_n^{(\infty)} + \frac{b}{2} \int_{-r}^r \left(\frac{\alpha_0}{\omega_D}\right) (\tilde{c}_{n+1}^{(\infty)} - \tilde{c}_{n-1}^{(\infty)}) \quad (4.33)$$

wobei wir die stationäre Lösung mit $\tilde{c}_n^{(\infty)}$ bezeichnet und durch $n \neq 0$ geteilt haben. Der Fall $n = 0$ kann mittels Gl. (4.34) und (4.29) diskutiert werden, und es gilt

$$C_0 = \tilde{c}_0^{(\infty)} = \frac{1}{2\pi} \quad (4.34)$$

Eine Möglichkeit, das Schema (4.33) zu lösen, besteht darin, die Rekursionsformel für die modifizierte Bessel-Funktion $I_\mu(z)$ ¹⁰⁵ zu benutzen. Diese Methode wurde in Ref. 106 ausgeführt.

In einer anderen Methode, die wesentlich günstiger für die numerische Auswertung ist, wird Gl. (4.33) in Form von unendlichen Kettenbrüchen gelöst. Dazu machen wir den Ansatz

$$\tilde{c}_n^{(\infty)} = S'_n \tilde{c}_{n-1}^{(\infty)} \quad (4.35)$$

und finden für S_n den unendlichen Kettenbruch

$$S'_n = \frac{b/2 J_{-r}(\frac{\alpha_0}{\omega_D})}{-(i\tilde{a} + nD) + b/2 J_r(\frac{\alpha_0}{\omega_D}) S'_{n+1}} \quad (4.36)$$

Schließlich muß die mittlere Schwebungsfrequenz $\langle\langle \dot{\phi} \rangle_F \rangle_t$ durch die $\tilde{c}_n$ ausgedrückt werden. Aus Gl. (4.26) folgt zusammen mit der Transformation (4.29) und der Fourier-Bessel-Entwicklung (4.12)

$$\begin{aligned} \langle\langle \dot{\phi} \rangle_F \rangle_t &= r\omega_D + \tilde{a} - \\ &- 2\pi b \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_{-r-s}(\frac{\alpha_0}{\omega_D}) \text{Im} \left\{ \langle e^{is\omega_D t} \tilde{c}_1(t) \rangle_t \right\} \end{aligned} \quad (4.37)$$

In der Ableitung dieser Gleichung haben wir keine Approximationen gemacht. Um jedoch mit den Näherungen, die in der Ableitung von Gl. (4.34), (4.35) und (4.36) gemacht wurden, konsistent zu sein, mitteln wir zunächst über die schnellen Oszillationen der Zitterbewegung (Gl. (4.31)) und gehen dann zum stationären Zustand über. Dies liefert

$$\langle\langle \dot{\phi} \rangle_F \rangle_t = r\omega_D + \tilde{a} - b J_{-r}(\frac{\alpha_0}{\omega_D}) \text{Im} S'_1, \quad (4.38)$$

wobei wir Gl. (4.34) und (4.35) benutzt haben.

Vergleichen wir die Gleichungen (4.36) und (4.38) mit den zugehörigen Ausdrücken für das ungezitterte Ring-Laser-Gyroskop aus Abschnitt 4.2.2 (Gl. (4.7) und (4.8)), so stellen wir zwei Unterschiede fest:

1. Ein zusätzlicher Beitrag $r\omega_D$ in Gl.(4.37) ($r = \dots -2, -1, 0, +1, +2$) und eine Abhängigkeit von S_1 von dem Index r (Gl. (4.36)). Dies führt auf die zusätzlichen toten Bänder bei ganzzahligen Vielfachen der Zitterfrequenz.
2. Die Änderung des Rückstreuoeffizienten b zu $bJ_r(\frac{\alpha_0}{\omega_0})$. Dies zeigt, daß die Breite des r -ten toten Bandes im rauschfreien Fall durch $|bJ_r(\frac{\alpha_0}{\omega_0})|$ gegeben ist⁺).

Beide Effekte sind deterministische Effekte und wurden schon in den Überlegungen in Abschnitt 4.3 abgeleitet und besprochen. Weiterhin stellen wir fest, daß die Diffusionskonstante D in derselben Weise eingeht als im ungezitterten Fall und somit jede der "Gyroskop Stufen" vom Rauschen näherungsweise genauso beeinflusst wird als im ungezitterten Fall⁺⁺); der Unterschied zwischen eingerastetem und freiem Bereich wird durch das Rauschen unscharf und "verschmiert".

⁺) Im rauschfreien Fall ($D = 0$) wird der Kettenbruch (4.36) unabhängig vom Index n , d.h. $S_n = S$. Dies führt auf folgende quadratische Gleichung für S

$$\frac{b}{2} J_{-r}(\frac{\alpha_0}{\omega_0}) S^2 - i\tilde{\alpha} S - \frac{b}{2} J_{-r}(\frac{\alpha_0}{\omega_0}) = 0$$

deren Lösung, eingesetzt in Gl. (4.38), die approximativen Lösungen (4.17) liefert.

⁺⁺) Dies läßt sich auch leicht in der Langevin-Methode³⁷ zeigen. Die in Abschnitt 4.3 durchgeführte Transformation der Variablen (Gl. (4.10) zusammen mit Gl. (4.14)) reduziert die Langevin-Gleichung (4.20) zu

$$\dot{\psi} = \tilde{\alpha} + b \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{m-r}(\frac{\alpha_0}{\omega_0}) \sin(m\omega_D t + \psi) + F(t)$$

(Die Phasen Variablen ϕ und ψ waren in Abschnitt 4.3 deterministisch, sie sind jetzt stochastische Variablen). Mittelung über mehrere Zitterperioden liefert sodann die bekannte Ring-Laser Langevin-Gleichung

4.5.2 Zwischen den "Gyroskop-Stufen"

Im Abschnitt 4.5.1 haben wir einen Ausdruck für $\langle\langle\dot{\phi}\rangle\rangle_{F,t}$ abgeleitet, der nur für Rotationsraten a in der Nähe von Vielfachen der Zitterfrequenz gültig ist, d.h. $a = r\omega_D + \tilde{a}$, wobei $|\tilde{a}| \ll \omega_D$. Für $\tilde{a} \approx 1/2 \omega_D$ muß daher eine andere Methode entwickelt werden. Für den rauschfreien Fall haben wir im Abschnitt 4.3 einen Ausdruck für $\langle\dot{\phi}\rangle_t$ in diesem Teilbereich von a abgeleitet. Die dabei benutzte Methode läßt sich jedoch nicht auf den Fall mit Rauschen übertragen. Deshalb gehen wir jetzt von einer formalen Lösung des Rekursionsschemas (4.23) aus.

$$C_n(t, \phi_0) = e^{-\left\{ \ln(a t + \frac{\alpha_0}{\omega_D} \sin \omega_D t) + n^2 D t \right\}} \left\{ C_n(t=0, \phi_0) + \frac{n b}{2} \int_0^t dt' [C_{n+1}(t') - C_{n-1}(t')] e^{\left\{ \ln(a t' + \frac{\alpha_0}{\omega_D} \sin \omega_D t') + n^2 D t' \right\}} \right\} \quad (4.39)$$

Die mittlere Schwebungsfrequenz ist nach Gl. (4.26) durch die Koeffizienten C_1 gegeben. Dieser kann durch Iteration näherungsweise aus Gl. (4.39) bestimmt werden, indem C_2 vernachlässigt wird und man $C_0 = 1/2\pi$ (Gl. (4.24)) benutzt. Wir werden anschließend zeigen, daß dies einer Störungstheorie und $(\frac{b}{\omega_D})^2 \ll 1$ entspricht. Einsetzen des so berechneten Koeffizienten C_1 in den Ausdruck für die mittlere Schwebungsfrequenz Gl. (4.26) liefert nach kurzer Rechnung

$$\langle\langle\dot{\phi}\rangle\rangle_{F,t} \approx a - \frac{b^2}{2} \Im \left\{ i \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\Im^2(\frac{\alpha_0}{\omega_D})}{(a - iD) + m\omega_D} \right\} \quad (4.40)$$

$$\psi \approx \tilde{a} + b \Im_r(\frac{\alpha_0}{\omega_D}) \sin \psi + F(t)$$

mit modifiziertem Rückstreuoeffizienten. Dabei haben wir auch angenommen, daß die Fluktuationen langsam sind verglichen mit dem Zitterantrieb. Abschließend sei noch bemerkt, daß die zu dieser Langevin-Gleichung gehörige Fokker-Planck-Gleichung auf das Rekursionsschema (4.32) führt.

Diese Summe kann exakt ausgeführt werden und gibt¹⁰⁷

$$\langle\langle\dot{\phi}\rangle\rangle_t = a - \frac{b^2 \pi}{2 \omega_D} \operatorname{Im} \left\{ i \frac{\int \frac{a-iD}{\omega_D} \left(\frac{\alpha_0}{\omega_D} \right) d - \frac{a-iD}{\omega_D} \left(\frac{\alpha_0}{\omega_D} \right)}{\sin \left(\frac{a-iD}{\omega_D} \pi \right)} \right\} \quad (4.41)$$

Drücken wir $\langle\langle\dot{\phi}\rangle\rangle_t$ in Einheiten von ω_D aus, so zeigt dies, daß die Abweichung des Gyroskops von seinem Idealverhalten $\langle\langle\dot{\phi}\rangle\rangle_t = a$ zwischen den "Gyroskop Stufen" von der Ordnung $\left(\frac{b}{\omega_D}\right)^2 \ll 1$ ist.

Gleichung (4.40) kann dadurch verbessert werden, daß man C_1 bis zur Ordnung $\left(\frac{b}{\omega_D}\right)^3$ berechnet, wobei man aus Gl. (4.39) den Koeffizienten C_2 bestimmt (C_3 wird dabei vernachlässigt) und in die Gleichung für C_1 einsetzt. Somit ist Gl. (4.40) der erste Term in einer störungstheoretischen Entwicklung in Potenzen von $\left(\frac{b}{\omega_D}\right)^2$.

Im Fall $D = 0$ (kein Rauschen) geht Gl. (4.40) in das Ergebnis Gl. (4.19) aus Abschnitt 4.3 über. Wir bemerken außerdem, daß für Rotationsraten a , die in der Nähe eines ganzzahligen Vielfachen der Zitterfrequenz liegen, d.h. $a \approx r\omega_D$, der Ausdruck für kleine Diffusionskonstanten D groß wird. Die Gl.n. (4.40) bzw. (4.41) können somit die exakte Einrastkurve nur für Rotationsraten zwischen zwei ganzzahligen Vielfachen der Zitterfrequenz annähern. Im Gegensatz zum rauschfreien Fall verhindert jedoch das Rauschen, daß die Summe singulär wird. Auch hier zeigt sich wieder die Tendenz des Rauschens, die Einrastkurve des Gyroskops "auszuschmieren".

4.6 Exakte Methode in Form von unendlichen Matrix-Kettenbrüchen

In diesem Abschnitt werden wir einen exakten Ausdruck für die mittlere Schwebungsfrequenz eines Ring-Laser-Gyroskops mit Zitterantrieb in Form von unendlichen Matrix-Kettenbrüchen ableiten. Eine derartige Lösung läßt sich beispielsweise direkt aus dem zeitgemittelten Rekursionsschema (4.23) gewinnen. Im Zusammenhang mit einem ähnlich gelagerten Problem (Ref. 89) wurde jedoch gezeigt, daß dies für bestimmte Werte der Parameter auf "unüberwindbare numerische Probleme" führt. Dies trifft auch auf das Ring-Laser-Problem zu, wie von J.D. Cresser¹⁰⁸ gezeigt wurde. Diese (Konvergenz) Probleme können

jedoch durch die Transformation Gl. (4.29) umgangen werden^{†)}. Diese Methode führt ein Rekursionsschema, deren Lösung in Form von Kettenbrüchen sehr schnell konvergiert.

Daher ist unser Ausgangspunkt Gl. (4.30). Nach Multiplikation mit $e^{ik\omega t}$ und Mittelung über die Zeit finden wir

$$\begin{aligned} 0 = & - \{ i(n\tilde{\alpha} - k\omega_D) + n^2 D \} \mathcal{Y}_n^k + \\ & + \frac{nb}{2} \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_{-r+k-s} \left(\frac{\alpha_0}{\omega_D} \right) \mathcal{Y}_{n+1}^s - \frac{nb}{2} \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_{-r-k+s} \left(\frac{\alpha_0}{\omega_D} \right) \mathcal{Y}_{n-1}^s \end{aligned} \quad (4.42)$$

wobei wir die Größen

$$\mathcal{Y}_n^k \equiv \langle \tilde{c}_n e^{ik\omega_D t} \rangle_t = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T dt \tilde{c}_n e^{ik\omega_D t} \right\} \quad (4.43)$$

definiert und die Beziehung

$$\langle \tilde{c}_n e^{ik\omega_D t} \rangle_t = -ik\omega_D \langle \tilde{c}_n e^{ik\omega_D t} \rangle_t$$

benutzt haben. Die letzte Relation läßt sich leicht durch partielle Integration beweisen.

^{†)} Dieselbe Transformation angewendet auf die in Ref. 89 behandelte Fokker-Planck-Gleichung

$$\frac{\partial P}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial \phi} [(a + b \sin \phi + \alpha_1 \cos \omega t + \alpha_2 \cos 2\omega t) P] + D \frac{\partial^2 P}{\partial \phi^2}$$

führt auch hier selbst für die kritischen Werte der Parameter auf konvergierende Kettenbrüche¹⁰⁹.

Durch die Definition der Vektoren¹¹⁰

$$(\underline{S}_n)_k \equiv \mathcal{S}_n^k \quad +) \quad (4.44)$$

läßt sich das Schema (4.42) auf ein Dreiterm-Rekursionsschema bringen

$$0 = \underline{A}_n \underline{S}_n + \underline{B}_n \underline{S}_{n+1} + \underline{C}_n \underline{S}_{n-1} \quad (4.45)$$

Die Matrizen $\underline{A}_n$, $\underline{B}_n$ und $\underline{C}_n$ sind durch folgende Ausdrücke gegeben

$$(\underline{A}_n)_{kj} \equiv - \{ i (n\tilde{\alpha} - k\omega_D) + n^2 D \} \delta_{kj} \quad (4.46a)$$

$$(\underline{B}_n)_{kj} \equiv \frac{nb}{2} \mathcal{J}_{-r+k-j} \left(\frac{\alpha_0}{\omega_D} \right) \quad (4.46b)$$

$$(\underline{C}_n)_{kj} \equiv - \frac{nb}{2} \mathcal{J}_{-r-k+j} \left(\frac{\alpha_0}{\omega_D} \right) . \quad (4.46c)$$

Zur Lösung von Gl. (4.45) machen wir den Ansatz¹¹⁰

$$\underline{S}_n = \underline{R}_n \underline{S}_{n-1} \quad (4.47)$$

und finden so für die unendliche Matrix $\underline{R}_n$ einen Ausdruck in Form eines unendlichen Kettenbruchs⁺⁺⁾

$$\underline{R}_n = - \left(\underline{A}_n + \underline{B}_n \underline{R}_{n+1} \right)^{-1} \underline{C}_n . \quad (4.48)$$

Die Gleichung (4.48) ist somit zusammen mit der Definition der Matrizen $\underline{A}_n$, $\underline{B}_n$ und $\underline{C}_n$ (Gl. (4.46a-c)) die exakte Lösung der zeitgemittelten Fokker-Planck-Gleichung (4.21).

⁺⁾ Wir interpretieren den Index k von $\mathcal{S}_n^k$ als die k -te Komponente des Vektors $\underline{S}_n$.

⁺⁺⁾ Fragen der Existenz der Inversen der unendlichen Matrix $\underline{A}_n + \underline{B}_n \underline{R}_{n+1}$ beantworten wir damit, daß die Inversen der im Abschnitt 4.7 besprochenen endlichen Matrizen existieren.

Die mittlere Schwebungsfrequenz $\langle\langle\dot{\phi}\rangle\rangle_{F,t}$ ist schließlich durch $\underline{R}_n$ auszudrücken. Aus Gl. (4.37) finden wir zusammen mit der Definition (4.43) und dem Ansatz (4.47)

$$\langle\langle\dot{\phi}\rangle\rangle_{F,t} = r\omega_D + \tilde{a} - 2\pi b \sum_{s,j=-\infty}^{\infty} J_{-r-s}\left(\frac{\alpha_0}{\omega_D}\right) \operatorname{Im} \left\{ (\underline{R}_1)_{sj} (\underline{S}_0)_j \right\}.$$

Aus Gl. (4.43) können wir leicht die Vektorkomponenten $(\underline{S}_0)_i = \mathcal{S}_0^i$ bestimmen

$$\mathcal{S}_0^i = \frac{1}{2\pi} \delta_{i,0},$$

wobei wir noch Gl. (4.34) benutzt haben.

Der exakte Ausdruck für die mittlere Schwebungsfrequenz $\langle\langle\dot{\phi}\rangle\rangle_{F,t}$ eines Ring-Laser-Gyroskops mit Zitterantrieb in Anwesenheit von Rauschen ist somit durch

$$\langle\langle\dot{\phi}\rangle\rangle_{F,t} = r\omega_D + \tilde{a} - b \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_{-r-s}\left(\frac{\alpha_0}{\omega_D}\right) \operatorname{Im}(\underline{R}_1)_{s0} \quad (4.49)$$

gegeben. Dabei wird die unendliche Matrix $\underline{R}_1$ aus dem unendlichen Matrix-Kettenbruch Gl. (4.48) gewonnen und die Matrizen $\underline{A}_n$, $\underline{B}_n$ und $\underline{C}_n$ sind durch die Gleichungen (4.46a-c) definiert.

4.7 Ergebnisse und Diskussion

In diesem Abschnitt werden wir numerische Ergebnisse, die auf der Methode des Abschnitts 4.6 basieren, diskutieren. Wir beginnen mit Bemerkungen über die numerische Auswertung der Kettenbrüche.

Aus Gl. (4.49) folgt, daß $\langle\langle\dot{\phi}\rangle\rangle_{F,t}$ durch eine Spalte der unendlichen Matrix $\underline{R}_1$ ausgedrückt ist. Die Matrix $\underline{R}_1$ kann gemäß Gl. (4.48) berechnet werden, indem wir damit beginnen, $\underline{A}_N$ zu invertieren (d.h. $\underline{R}_{N+1} = 0$), und das Ergebnis von rechts mit $\underline{C}_N$ zu multiplizieren. Die so berechnete Matrix $\underline{R}_{N-1}$ wird von links mit $\underline{B}_{N-2}$ multipliziert und zu $\underline{A}_{N-2}$ addiert. Die Inversion der resultierenden Matrix ist so-

dann der nächste Schritt und nach N Iterationen erhalten wir schließlich R_1 ⁹⁴. Um die Genauigkeit einer solchen "Abwärtsiteration"¹¹⁰ zu testen, führen wir das Schema für verschiedene N aus. Diese Methode kann jedoch nur auf endliche Matrizen angewendet werden. Daher müssen wir die unendlichen Matrizen A_n , B_n und C_n auf endliche reduzieren. Beschränken wir sie auf ihr Null-Null Element, d.h.

$$(\tilde{A}_n)_{kj} = -(in\tilde{\alpha} + n^2 D) \delta_{k,0} \delta_{j,0} \quad (\tilde{B}_n)_{kj} = \frac{nb}{2} \gamma - r \left(\frac{\alpha_0}{\omega_0} \right) \delta_{k,0} \delta_{j,0}$$

$$(\tilde{C}_n)_{kj} = - \frac{nb}{2} \gamma - r \left(\frac{\alpha_0}{\omega_0} \right) \delta_{k,0} \delta_{j,0}$$

so reduziert sich der Matrix-Kettenbruch (4.48) auf den (gewöhnlichen) Kettenbruch Gl. (4.36), und der Ausdruck für die mittlere Schwebungsfrequenz Gl. (4.49) wird der genäherte Ausdruck (4.38). Dies legt nahe, die Abwärtsiteration mit endlichen Matrizen um das Null-Null Element zu beginnen. Die Genauigkeit kann dadurch getestet werden, daß die Dimensionen erhöht werden. Dabei stellte sich heraus, daß für die betrachteten Parameter 5x5 Matrizen dieselben Ergebnisse lieferten wie 11x11 Matrizen, solange die Rotationsrate in der Nähe der "Gyroskop Stufen" lag. Wir halten außerdem fest, daß zur Berechnung von $\langle\langle\dot{\phi}\rangle_F\rangle_t$ in der Umgebung der n-ten Stufe der Parameter r in Gl. (4.49) gleich n sein muß. Andernfalls wird keine Konvergenz erzielt.

Für die folgenden Zeichnungen haben wir, bis auf eine Ausnahme, "untypische" Werte für die Parameter b, D, α_0 und ω_D benutzt, um die Eigenheiten der Einrastkurve eines Ring-Laser-Gyroskops mit Zitterantrieb deutlich zu zeigen. Die Methode gilt jedoch auch für realistische Werte, wie in Fig. 14. In allen Rechnungen haben wir den Rückstreuoeffizienten b, den Rauschparameter D und die Zitterfrequenz ω_D konstant gehalten, während die Zitteramplitude variiert wurde. (Wir haben alle Größen in Einheiten des Rückstreuoeffizienten ausgedrückt und $b = 1$, $D = 10^{-1}$ und $\omega_D = 10$ gesetzt.)

In allen Betrachtungen beschränken wir uns auf positive Rotationsfrequenzen, da man aus Gl. (4.23) und (4.26) leicht zeigen kann⁺), daß die Einrastkurve antisymmetrisch in der Rotationsrate a sein muß, d.h.

$$\langle\langle\dot{\phi}\rangle_F\rangle_t(-a) = - \langle\langle\dot{\phi}\rangle_F\rangle_t(a) .$$

⁺) Fußnote siehe Seite 99

Figur 12 zeigt die mittlere Schwebungsfrequenz in Anwesenheit von Rauschen $\langle\langle\dot{\phi}\rangle\rangle_{F,t}$ in Abhängigkeit der Rotationsrate a , wobei wir zur Berechnung den exakten Ausdruck (4.49) zu Grunde gelegt haben. Für dieses Beispiel haben wir $\alpha_0/\omega_D = 3$ gewählt. Auf Grund der Nicht-linearität der Bewegungsgleichung für ϕ (Gl. 4.20)) verursacht der Zitterterm $\alpha_0 \cos \omega_D t$ die zusätzlichen toten Bänder bei ganzzahligen Vielfachen der Zitterfrequenz ω_D . (Die Einrastkurve, die zwischen den Stufen fast eine Gerade ist - siehe Fig. 16 - wurde hier der Einfachheit halber weggelassen.) Der Vergleich mit Fig. 1 aus Ref. 31 zeigt, daß durch das Rauschen die toten Bänder und die freien Bereiche nicht mehr scharf unterschieden sind.

Figur 13 zeigt die Einrastkurve um die Rotationsrate Null für verschiedene Zitteramplituden. Für $\alpha_0/\omega_D = 2.4$ verschwindet das tote Band völlig, da dessen Breite (in Abwesenheit von Rauschen) näherungsweise durch $|J_0(\alpha_0/\omega_D)|$ gegeben ist und die nullte Bessel-Funktion dort eine Nullstelle hat¹⁰⁵. Für wachsendes α_0/ω_D wird das tote Band immer kleiner. Dies ist sofort aus der asymptotischen Entwicklung von $J_0(\alpha_0/\omega_D)$ für $\alpha/\omega_D \gg 1$ ersichtlich.

$$J_0\left(\frac{\alpha_0}{\omega_D}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega_D}{\alpha_0} \cos\left(\frac{\alpha_0}{\omega_D} - \frac{\pi}{4}\right) \xrightarrow{\alpha/\omega_D \rightarrow \infty} 0$$

- +) Ersetzen wir in Gl. (4.23) a durch $-a$, t durch $t + \frac{\pi}{\omega_D}$ und n durch $-n$, so finden wir

$$\dot{C}_n(-a) = -[\ln(\alpha + \alpha_0 \cos \omega_D t) + n^2 D] C_n(-a) - \frac{nb}{2} (C_{-n+1}(-a) - C_{-n-1}(-a))$$

Anwendung der Symmetriebeziehung (4.25) führt auf

$$\dot{C}_n^*(-a) = -[\ln(\alpha + \alpha_0 \cos \omega_D t) + n^2 D] C_n^*(-a) + \frac{nb}{2} (C_{n+1}^*(-a) - C_{n-1}^*(-a))$$

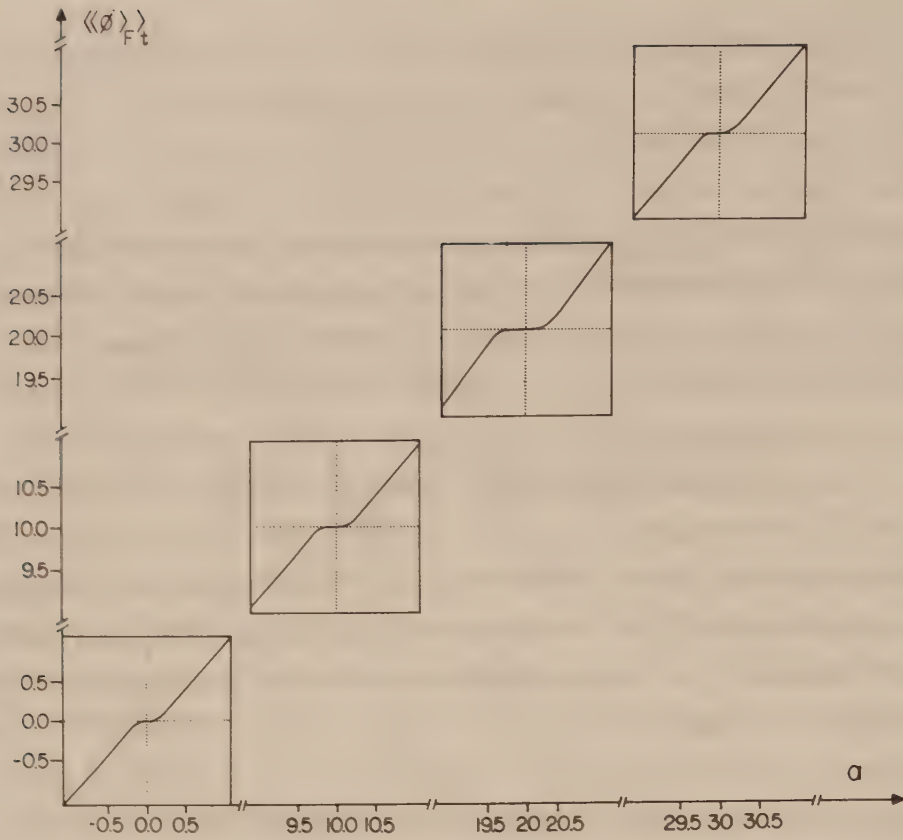
Durch Vergleich mit Gl. (4.23) erhalten wir

$$C_n(-a) = C_n^*(a)$$

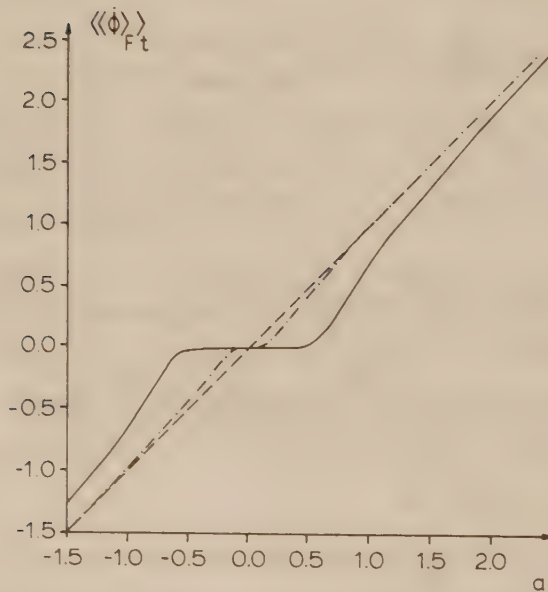
woraus mit (4.26)

$$\langle\langle\dot{\phi}\rangle\rangle_{F,t}(-a) = -a - 2\pi \operatorname{Im} C_1^*(a) = -(a - 2\pi \operatorname{Im} C_1(a)) = -\langle\langle\dot{\phi}\rangle\rangle_{F,t}(a)$$

folgt.

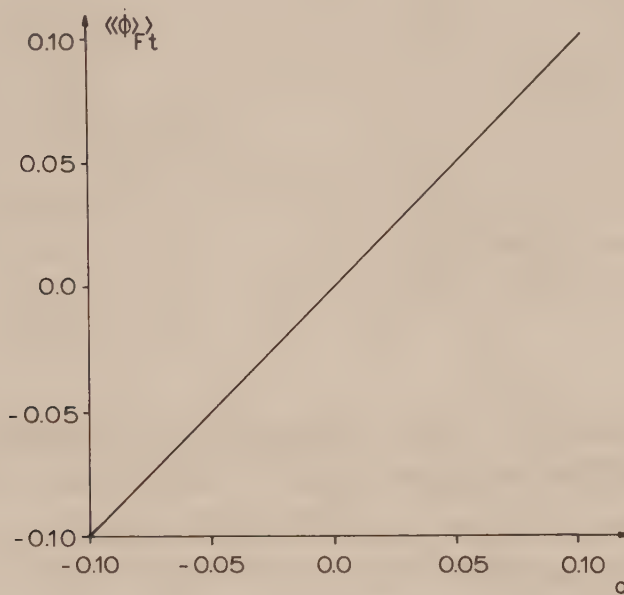


Figur 12: Mittlere Schwebungsfrequenz eines Gyroskops mit Zitterantrieb als Funktion der Rotationsrate für $b = 1$, $D = 10^{-1}$, $\alpha_D = 10$ und $\omega_0 = 30$.



Figur 13: Einrastkurve des Gyroskops in der Umgebung von $a = 0$ für $b = 1$, $D = 10^{-1}$ und $\omega_D = 10$ - $\alpha_0 = 10$, --- $\alpha_0 = 24.0$, -.- $\alpha_0 = 30$

Um das Einrasten des Lasers zu verhindern, muß somit α_0/ω_D sehr groß gewählt werden. In Gyroskopen mit mechanischem Zitterantrieb ist $\alpha_0/\omega_D \cong 900$. Dieser Fall - berechnet mit der Matrix-Kettenbruch-Methode - ist in Fig. 14 gezeigt. Die mittlere Schwebungsfrequenz zwischen zwei Stufen hängt in der Tat linear von der Rotationsfrequenz ab.



Figur 14: Einrastkurve um die Rotationsrate Null für $b = 1$, $D = 10^{-1}$ und $\alpha_0/\omega_D = 900$.

Der exakte Ausdruck für $\langle\langle\dot{\phi}\rangle\rangle_{Ft}$ als Funktion der Rotationsrate a zeigt, wie man bei genauerem Hinsehen aus Fig. 12 erkennt, im Gegensatz zur approximativen Lösung eine Asymmetrie bei $2\omega_D$. Diese führt zu einem Unterschied zwischen der exakten und der approximativen Einrastkurve, da letztere symmetrisch bzgl. $r\omega_D$ sind^{+) (r = ... -2, -1, 0, +1, +2, ...)}. Figur 15 zeigt diesen Unterschied für $\alpha_0/\omega_D = 1$. Im Fall des toten Bandes um die Rotationsrate Null stimmen beide Methoden jedoch sehr gut überein, da der exakte Ausdruck $\langle\langle\dot{\phi}\rangle\rangle_{Ft}$ ebenfalls antisymmetrisch ist. Die approximativen und die exakten Einrastkurven

^{+) Der Beweis geht analog zur Fußnote auf Seite 99, wobei wir jetzt von Gl. (4.32) und Gl. (4.38) ausgehen.}

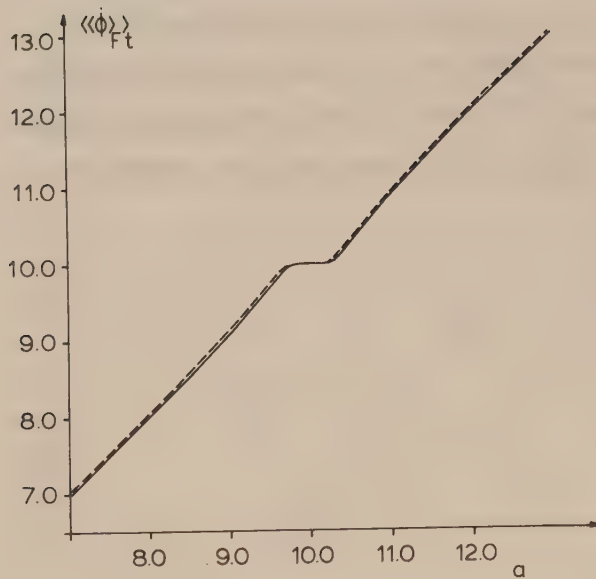
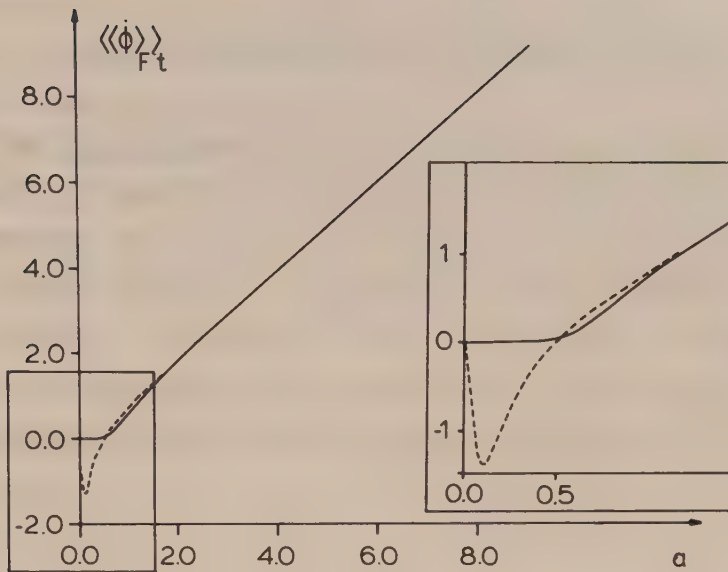


Fig. 15: Vergleich zwischen der in der Umgebung einer Gyroskop-Stufe angenäherten Einrastkurve (Gl. (4.38)), (gestrichelte Linie), und der exakten nach der Kettenbruchmethode (ausgezogene Linie) für $b = 1$, $D = 10^{-1}$ und $\alpha_0/\omega_D = 1$.

in der Nähe von ganzzahligen Vielfachen von ω_D nur im Fall des nullten toten Bandes übereinstimmen. Für höhere Stufen ($r \neq 0$) ist ein Unterschied vorhanden, der in Fig. 15 detailliert gezeigt wird.

Abschließend vergleichen wir noch in Fig. 16 den approximativen Ausdruck (4.41) mit der exakten Methode für den Fall $\alpha_0/\omega_D = 1$. Man erkennt, daß Gl. (4.40) die Einrastkurve zwischen zwei "Gyroskop Stufen" sehr gut annähert, daß aber die Approximation in der Nähe der Stufen zusammenbricht. Dies ist noch einmal vergrößert herausgezeichnet.



Figur 16: Vergleich zwischen der approximativen Einrastkurve zwischen den Gyroskop-Stufen (Gl. (4.41)) (gestrichelte Linie) und der exakten (durchgezogene Kurve) für $b = 1$, $D = 10^{-1}$, $\bar{D} = 10$ und $\omega_0 = 10$. (Der Einsatz vergrößert die Einrastkurve in der Umgebung der Rotationsrate Null.)

V. Nachweis von Gravitationswellen mittels nichtlinearer Spektroskopie?

5.1. Allgemeine Einleitung und Überblick über Kapitel V

Die Diskussion des allgemein relativistischen Sagnac-Effekts und die damit verbundenen Möglichkeiten, mit Ring-Laser-Gyroskopen Tests der allgemeinen Relativitätstheorie durchzuführen, zeigen das Zusammenspiel von Gravitationstheorie und Quantenoptik. In diesem Kapitel wollen wir ein weiteres Beispiel aus diesem Problemkreis behandeln, das zwei so verschiedene Gebiete der Physik wie zeitabhängige Gravitationsfelder, d.h. Schwerewellen, und nichtlineare Spektroskopie zusammenführt.

5.1.1 Einleitung

Im Abschnitt 1.4. haben wir die erfolgversprechenste Methode zum Nachweis von Gravitationswellen diskutiert, die Michelson-Interferometer-Methode. Dabei wird auf optischem Wege, d.h. durch Messung der Verschiebung von Interferenzstreifen, die durch eine einfallende Gravitationswelle induzierte Längenänderung der Interferometerarme nachgewiesen. In einer Arbeit von Nesterikhin et al.³² wird ein neuer Typ von Gravitationswellendetektor vorgeschlagen, der auf der gesättigten Absorptionsspektroskopie beruht. Hierbei wird benutzt, daß bei Anwesenheit einer Gravitationswelle Seitenbänder im Absorptionsspektrum auftreten sollten. Diese indirekte Nachweismethode bringt, wie in Ref. 32 behauptet wird, eine enorme Steigerung der Sensitivität, so daß der Nachweis von Schwerewellen in greifbare Nähe rückt. Andererseits haben qualitative Überlegungen von Scully³² Zweifel an der Gültigkeit der Rechnungen von Ref. 32 und insbesondere an deren Interpretationen aufkommen lassen. Aus diesem Grunde wollen wir uns mit diesem Vorschlag näher auseinandersetzen.

Die Darstellung in den Arbeiten von Nesterikhin et al. ist typisch für die sogenannte "Landau-Schule", d.h. es werden lediglich die Ausgangsgleichungen und das Endergebnis angegeben. Alle Zwischenschritte und Näherungen sind unterdrückt. Auch ist aus der Darstellung in Ref. 32 nicht klar, worauf die Sensitivität des vorgeschlagenen Detektors be-

ruht und woher die Vorteile gegenüber anderen naiven Modellen³³ herühren. Wir haben in der vorliegenden Arbeit diese offenen Fragen in aller Ausführlichkeit diskutiert und mittels neu entwickelter Methoden, wie z.B. der Bevölkerungs-Matrix für beschleunigte Teilchen, die am Vorbild der Lambschen* Lasertheorie^{38,113} orientiert ist, behandelt. Wir haben dabei zwar dieselben Resultate innerhalb der in Ref. 32 durchgeführten Approximationen erhalten, unsere Interpretation dieser Resultate ist jedoch grundverschieden von derjenigen in Ref. 32.

Wir beginnen zunächst mit einer Zusammenfassung der Ergebnisse von Ref. 32 und geben sodann im Abschnitt 5.1.3 eine Darstellung des von uns benutzten Modells, das sich in wesentlichen Punkten von dem aus Ref. 32 unterscheidet. Die Einleitung von Kapitel V schließt mit einem Überblick über den logischen Gedankengang und die in diesem Kapitel durchgeführten Rechnungen.

5.1.2 Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse aus Ref. 32

Bevor wir auf das in Ref. 32 vorgeschlagene Experiment eingehen, wollen wir den Begriff der gesättigten Absorption⁶¹ erläutern. Dabei wird die Absorption einer Testwelle E_1 in einem Ensemble von Atomen gemessen, das durch eine starke Welle E_0 gepumpt wird. Die Felder E_0 und E_1 sind in der Regel kollinear und gegenläufig. In der Interpretation solcher Experimente wird für die Atome die sogenannte "hydrodynamische Bewegung" angenommen, d.h. es wird angenommen, daß sie sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegen und zwar konstant sowohl in der Richtung als auch im Betrag. Für die Geschwindigkeitsverteilung der Atome im Strahl oder Gas wird in der Regel³⁸ eine Boltzmann Verteilung

$$W(v_{th}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}u} e^{-\left(\frac{v_{th}}{u}\right)^2} \quad (5.1)$$

*Unabhängig von W.E. Lamb haben H. Haken und Sauermann eine Theorie des Lasers entwickelt¹¹¹. Diese benutzt jedoch nicht den Begriff der Bevölkerungs-matrix. In Ref. 112, der wohl vollständigsten Arbeit über die Theorie des Lasers, zeigt H. Haken die Äquivalenz zwischen seiner Theorie und der von Lamb.

angenommen, wobei der Geschwindigkeitsparameter u mit der effektiven Temperatur T des Gases über die Beziehung

$$\frac{1}{2} m u^2 = k_B T \quad (5.2)$$

in Zusammenhang steht, und m die atomare Masse und k_B die Boltzmann Konstante bezeichnen.

Aus der Gesamtzahl der Atome kann nur diejenige Untergruppe von Atomen die Pumpwelle E_0 mit Frequenz ν_0 absorbieren, deren Geschwindigkeit gerade so ist, daß sie auf Grund des Doppler-Effekts resonant mit der atomaren Frequenz ω ist. Wegen der natürlichen Linienbreite γ der Atome absorbieren nicht nur Atome mit genau der Geschwindigkeit v_0 , sondern alle, deren Geschwindigkeit in einem Interwall γ/k_0 um v_0 liegt. Die Größe k_0 bezeichnet dabei den Wellenvektor der Pumpwelle.

Die Zahl der Atome im Grundzustand als Funktion der Geschwindigkeit ist somit durch eine Boltzmannverteilung gegeben, die ein "Loch" der Breite γ/k_0 bei der Resonanzgeschwindigkeit v_0 besitzt. Die Tiefe des "Lochs" hängt in einer nichtlinearen Weise von der Intensität der Pumpwelle ab und geht im Grenzfall einer unendlich großen Pumpintensität gegen einen endlichen Wert. Dieser Sättigungsprozess rührt daher, daß nur eine endliche Anzahl von Atomen in den angeregten Zustand übergehen kann. Das Testfeld E_1 dient lediglich zum Auslesen des von dem Pumpfeld E_0 "eingebrannten Lochs" (engl. "hole burning").*

Soweit die übliche Methode der gesättigten Absorption, bei der die Beschleunigung der Atome durch etwaige externe Felder, nicht berücksichtigt wird. Während in Europa und Amerika Spektroskopie an beschleunigten Teilchen weitgehend unbekannt ist, haben sich Spektroskopiker in der Sowjetunion schon längere Zeit mit dieser Problematik befaßt¹¹⁴. In verschiedenen Artikeln^{32,115} wurde dieser Formalismus auf Probleme angewandt, bei denen die Beschleunigung der Atome durch Gravitationsfelder verursacht wird. Insbesondere wurde in Ref. 32 das oben diskutierte Absorptionsexperiment für Atome untersucht, die durch eine einfallende Gravitationswelle beschleunigt werden.

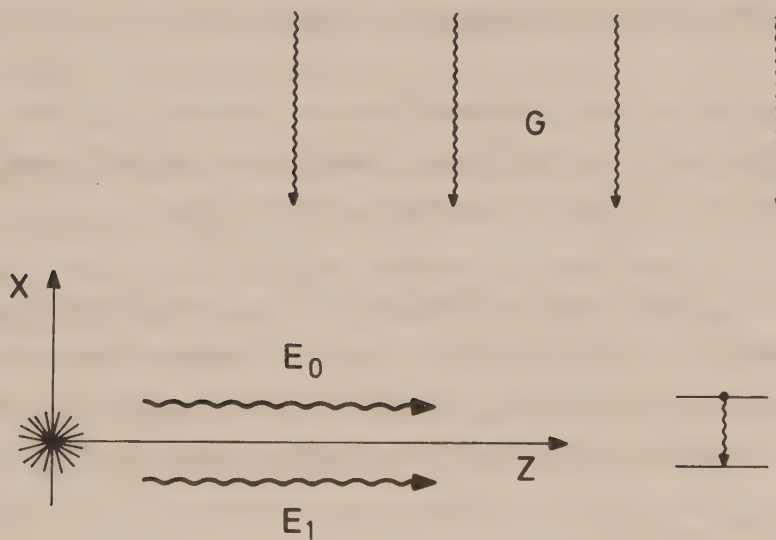
* Dieses Loch wird oft nach seinem Entdecker "Bennett Loch" genannt.

Es erschien jedoch nicht möglich, dadurch eine bessere Nachweisempfindlichkeit zu erzielen. Die obigen Aussagen, die die Vermutung nahelegen, daß mit der thermischen Bewegung ein besseres Ergebnis erzielt werden kann als ohne, sind daher erstaunlich.

5.1.3 Beschreibung des Modellexperiments zur gesättigten Absorption bei Anwesenheit von Gravitationswellen.

Zu Lösung der im Abschnitt 5.1.2 angesprochenen Fragen wollen wir ein Experiment diskutieren, das in Fig. 17 zusammengefaßt ist.

Dabei untersuchen wir die Absorption einer schwachen Testwelle E_1 durch ein Ensemble von Zwei-Niveau Atomen, die von einem starken elektromagnetischen Feld E_0 gepumpt werden. Die beiden Wellen seien kollinear und sollen sich entlang der z-Achse ausbreiten. Die Atome bewegen sich unter dem Einfluß einer Gravitationswelle der Frequenz Ω , die entlang einer Achse senkrecht zur optischen Achse einfällt. Die Verteilung der Atome im Raum, d.h. entlang der z-Achse sei mit n be-



Figur 17: Eine entlang der x-Achse einfallende Gravitationswelle verursacht Schwingungen des Atoms relativ zum Koordinatenursprung. Das Atom wechselwirkt zudem mit den elektrischen Feldern E_0 und E_1 , die sich entlang der z-Achse ausbreiten.

zeichnet. Da die Atome auf Grund der Gravitationswelle beschleunigt werden, ist diese Verteilung auch eine Funktion der Zeit. Als Zeitnullpunkt wählen wir den Zeitpunkt, bei dem die elektrischen Felder eingeschaltet werden. Die räumliche Anfangsverteilung ist somit $n = n(t=0, z)$. In der vorliegenden Arbeit wollen wir zwei Beispiele hierfür studieren, und zwar

- (1) den Fall von N Atomen, die sich zum Zeitpunkt $t = 0$ am Ort $z_0 = \ell$ befinden, i.e.

$$n = N \delta(z_0 - \ell) \quad (5.4)$$

und

- (2) eine homogene Verteilung der Atome entlang der gesamten z -Achse, d.h.

$$n = n_0 \quad (5.5)$$

Diese Verteilung dient oft als Modell für einen Resonator, bei dem Reflexionen von den Wänden vernachlässigt werden. In Ref. 32 wurde implizit eine solche Verteilung benutzt.

Der Fall (1) wird sich als Vergleichsmöglichkeit zum Fall (2) als äußerst nützlich erweisen. Die Beiträge in den Nebendiagonalelementen der Dichtematrix im Fall (2) werden dadurch einsichtiger.

Die Geschwindigkeit v_0 der Atome zum Zeitpunkt $t = 0$ setzt sich aus zwei Anteilen zusammen. Ein Beitrag rührt von der Bewegung durch die Gravitationswelle her; es sei mit v_{gr} abgekürzt. Der zweite Beitrag hat seine Ursache in der thermischen Bewegung der Atome. Es gilt somit

$$v_0 = v_{gr} + v_{th}$$

Im Abschnitt 5.3 werden wir noch genauer auf die Anfangsgeschwindigkeit v_{gr} eingehen. Da wir die Frage klären wollen, inwiefern die Berücksichtigung der thermischen Geschwindigkeit eine Verbesserung gegenüber dem Fall ohne thermische Bewegung bringt, werden wir zwei Beispiele der Verteilungsfunktionen $W = W(v_{th})$ betrachten, nämlich

$$W(\nu_{th}) = \delta(\nu_{th}) \quad (5.6)$$

und den Fall der Boltzmann Verteilung Gl. (5.1).

5.1.4 Überblick über den Gedankengang und die Rechnung von Kapitel V

In diesem Abschnitt wollen wir unseren Gedankengang und die Durchführung der Rechnung erläutern. Darüber hinaus geben wir eine Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse.

Bei dem in Abschnitt 5.1.3 beschriebenen Experiment wird die von den Atomen absorbierte Leistung gemessen. Diese ist, wie in Abschnitt 5.2 gezeigt werden wird, proportional zur Zeitableitung der Nebendiagonalelemente der Dichtematrix ρ_{ab} . Das Ziel der Rechnung ist somit die Bestimmung von ρ_{ab} .

Dazu gehen wir analog zur bekannten Lasertheorie von Lamb^{38,113} vor in der, bei bekannter Bewegung der Atome, die Größen ρ_{ab} aus der sogenannten Bevolkerungsmatrix berechnet werden. Wir untersuchen daher im Abschnitt 5.3 zunächst die Bewegung der Atome unter dem Einfluß einer einfallenden Gravitationswelle und finden, daß die Atome auf Grund der Gravitationswelle eine Beschleunigung relativ zum Laser, d.h. relativ zum Ursprung des Koordinatensystems erfahren.

Die Lambsche Theorie des Gaslasers behandelt jedoch nur Atome mit konstanter Geschwindigkeit und kann somit zur Beschreibung des Modellexperiments nicht herangezogen werden. Im Abschnitt 5.4 verallgemeinern wir deshalb diese Theorie auf beschleunigte Atome.

Im Abschnitt 5.5 wird unter Berücksichtigung der für dieses Problem notwendigen Anfangsbedingungen, eine formale Lösung der Dichtematrixgleichungen in Form eines gekoppelten Systems von Integralgleichungen angegeben.

Im Abschnitt 5.6 werden wir dieses System störungstheoretisch lösen und insbesondere die Beiträge nullter, erster und dritter Ordnung in der Wechselwirkung studieren. Die Terme erster und dritter Ordnung liefern die Nebendiagonalelemente der Dichtematrix und sind somit zur

Berechnung der absorbierten Leistung notwendig. Der Beitrag nullter Ordnung, zeigt eine für den Fall einer homogenen Verteilung der Atome, eine interessante Eigenschaft: Für ortsabhängige Beschleunigungen bleibt nämlich formal die Anzahl der Atome im Resonator nicht konstant. Dies ist ein wichtiger Punkt, da zur Berechnung der absorbierten Leistung über alle Atome im Resonator integriert werden muß. Daher werden wir diese Problematik im Abschnitt 5.6.1 näher behandeln.

Im Abschnitt 5.6.2 untersuchen wir die Nebendiagonalelemente der Dichtematrix für den Fall der Wechselwirkung der Atome mit einem starken Pumpfeld. Wir diskutieren dazu die räumlichen Verteilungen in der Form einer Deltafunktion und eine homogene Anfangsverteilung. Da wir insbesondere an der Frage interessiert sind, inwiefern die thermische Bewegung Einfluß auf die Seitenbänder hat, behandeln wir zwei Geschwindigkeitsverteilungen, nämlich die einer Deltafunktionsverteilung und die einer Boltzmann Verteilung.

Dabei zeigt sich, daß das Verhältnis aus dem Beitrag dritter Ordnung zu erster Ordnung bei Atomen ohne thermische Geschwindigkeit durch den dimensionslosen Sättigungsparameter I gegeben ist. Dieser Parameter ist der Entwicklungsparameter der Störungstheorie und daher wesentlich kleiner als eins. Bei Berücksichtigung der thermischen Bewegung dagegen finden wir für dieses Verhältnis die in Ref. 32 angegebene Gleichung (5.3). Aus einem Vergleich der Ergebnisse mit und ohne thermischer Geschwindigkeit wird der erstaunliche Verstärkungsfaktor von 10^9 klar. Während nämlich bei einer homogenen Verteilung die entsprechenden Beiträge dritter Ordnung von derselben Größenordnung sind, unterscheiden sich die Beiträge der ersten Ordnung ganz wesentlich. Bei thermischer Bewegung ist dieser Term um genau den Faktor 10^9 kleiner als der entsprechende Term ohne thermischer Bewegung. Der "Verstärkungseffekt" rührt somit lediglich daher, daß der Beitrag erster Ordnung im Fall der Brownschen Bewegung nahezu verschwindet. Der erste "nichtverschwindende" Beitrag ist somit der dritter Ordnung. Da dieser jedoch von derselben Größenordnung ist als der entsprechende ohne thermischer Bewegung und da dieser kleiner ist als der erster Ordnung, kann die Hinzunahme der thermischen Geschwindigkeit keine absolute Steigerung der Höhen der Seitenbänder zur Folge haben.

Es ist jedoch interessant, daß ohne thermischer Bewegung der Atome die Höhe der Seitenbänder nahezu unabhängig von der Pumpintensität ist, da der Hauptbeitrag von der ersten Ordnung herrührt. Bei Berücksichtigung der thermischen Geschwindigkeit sind diese Höhen jedoch eine empfindliche Funktion der Pumpintensität, da in diesem Fall der Beitrag erster Ordnung verschwindet. Nur in diesem Sinne kann der folgende Satz auf Ref. 32 verstanden werden:

"The sensitivity of the detector increases significantly, if there is saturation,..."

Das Kapitel V schließt mit der Diskussion des resultierenden Absorptionsspektrums.

5.2. Absorbierte Leistung

In diesem Abschnitt wollen wir die von den Atomen absorbierte Leistung im Formalismus der Dichtematrix ρ angeben.

Aus der Elektrodynamik ist bekannt¹¹⁶, daß die über die Zeit gemittelte Leistung W eines elektrischen Feldes E an einem dielektrischen Medium der Polarisation P durch

$$W = \left\langle \int_V d^3\vec{r} \quad \vec{E}(t, \vec{r}) \cdot \frac{\partial \vec{P}(t, \vec{r})}{\partial t} \right\rangle_t \quad (5.7)$$

gegeben ist, wobei die Integration über das gesamte Volumen V des Mediums zu erstrecken ist, und wir die Zeitmittelung wie früher

$$\langle f(t) \rangle_t \equiv \lim_{T \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T dt f(t) \right\} \quad (5.8)$$

definieren. In dem im Abschnitt 5.1.3 beschriebenen Experiment erzeugt die Pumpwelle E_0

$$E_0 = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 e^{-i(\nu_0 t + \phi_0 - k_0 z)} + c.c. \quad (5.9)$$

eine Polarisation des Mediums, während diese durch das Testfeld

$$E_1 = \frac{1}{2} \mathcal{E}_1 e^{+i(\nu_1 t + \phi_1 - k_1 z)} + c.c. \quad (5.10)$$

"ausgelesen" wird. Dabei haben wir eine Ausbreitung entlang der z-Achse angenommen und sind zu skalaren Größen übergegangen.

Gemäß der halbklassischen Lasertheorie^{38,111,112} wird die Polarisation $P(t, z, v)$ durch Atome erzeugt, die zum Zeitpunkt t an der Stelle z sind und dort eine Geschwindigkeit v besitzen. Das Ensemble von Atomen wird durch eine Dichtematrix $\rho = \rho(t, z, v)$ beschrieben. Es gilt dabei der Zusammenhang

$$P(t, z, v) = \wp (\rho_{ab}(t, z, v) + c.c.)$$

wobei $\wp$ das Dipolmatrixelement des Übergangs $a \rightarrow b$ bezeichnet. Um die Polarisation $P = P(t, z)$ zu finden, muß noch über die Geschwindigkeitsverteilung der Atome integriert werden.

$$P(t, z) = \wp \int_{-\infty}^{\infty} dv (\rho_{ab}(t, z, v) + c.c.)$$

Einsetzen in Gl. (5.7) unter Berücksichtigung von Gl.(5.10) liefert

$$W = 2\hbar\mu_1 \operatorname{Re} \left\{ \left\langle \int dz e^{i(\nu_1 t + \phi_1 - k_1 z)} + e^{i(\nu_1 t + \phi_1 - k_1 z)} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} dv \rho_{ab} \right\rangle_t \right\} \quad (5.11)$$

wobei $\mu_1 = \frac{\wp \mathcal{E}_1}{2\hbar}$ die Rabi-Frequenz des Testfeldes bezeichnet und das Symbol $\mathcal{E}$ für Integration über die gesamte Länge des Mediums steht. Im Abschnitt 5.6.2 werden wir zeigen, daß innerhalb der Resonanznäherung die zeitliche Entwicklung der Nebendiagonalelemente der Dichtematrix durch

$$\rho_{ab} \sim e^{-i\nu_j t}$$

gegeben ist, wobei ν_j alle möglichen Frequenzkombinationen von ν_0 und ν_1 und $\nu_0 + \Omega$ sind. Damit reduziert sich Gl. (5.11) zu

$$W = 2\hbar\mu_1 \operatorname{Re} \left\{ \left\langle \int dz e^{i(\nu_1 t + \phi_1 - k_1 z)} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} dv \rho_{ab}(t, z, v) \right\rangle_t \right\}, \quad (5.12)$$

da der zweite Beitrag auf Grund der Zeitmittelung verschwindet.

5.3 Bewegung der Atome

Die Aufgabe ist somit die Berechnung der Nebendiagonalelemente der Dichtematrix. Dies wird ganz analog zur halbklassischen Lasertheorie

von Lamb^{38,113} durchgeführt werden. Um diese jedoch anwenden zu können, ist es notwendig, die Bewegung der Atome unter dem Einfluß einer einfallenden Gravitationswelle zu studieren.

Dazu werden wir in diesem Abschnitt den kovarianten Formalismus und die sogenannten Fermi-Normal-Koordinaten⁶⁰ heranziehen.

Im Folgenden beschränken wir uns zunächst auf die Diskussion der Bewegung eines einzelnen Atoms relativ zum Laser, wobei wir annehmen wollen, daß außer der Gravitationswelle keine äußeren Kräfte angreifen. Am Ende dieses Abschnittes werden wir diese Ausführungen auf den Fall eines Ensembles von Atomen mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten und Anfangspositionen ausdehnen.

Die Koordinaten des Lasers und des Atoms in der vierdimensionalen Raum-Zeit $x^\mu = (ct, x^1, x^2, x^3)$ seien mit

$$x_{\text{Laser}}^\mu = x^\mu(\tau)$$

und

$$x_{\text{Atom}}^\mu = x^\mu_\tau + \Delta x^\mu(\tau)$$

abgekürzt, wobei τ einen Parameter bezeichnet, der die Weltlinie des Lasers oder des Atoms parametrisiert. Da keine äußeren Kräfte angreifen - Strahlungsdruck, oder Stöße der Atome untereinander sind vernachlässigt - bewegen sich sowohl Laser als auch Atom auf Geodäten. Daher erfüllen ihre Koordinaten die Verallgemeinerung der Newtonschen Bewegungsgleichung, die sogenannte Geodätengleichung⁸, d.h.

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu(x) \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0 \quad (5.13)$$

und

$$\frac{d^2 (x^\mu + \Delta x^\mu)}{d\tau^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu(x + \Delta x) \frac{d(x^\rho + \Delta x^\rho)}{d\tau} \frac{d(x^\sigma + \Delta x^\sigma)}{d\tau} = 0 \quad (5.14)$$

wobei die Christoffelsymbole $\Gamma_{\rho\sigma}^\mu$ wie üblich durch

$$\Gamma_{\rho\sigma}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\tau} (g_{\tau\rho,\sigma} + g_{\tau\sigma,\rho} - g_{\rho\sigma,\tau}) \quad (5.15)$$

gegeben sind. Die metrischen Koeffizienten $g_{\mu\nu}$ sind durch die Einsteinsche Feldgleichungen festgelegt und werden in diesem Abschnitt für den Fall einer schwachen Gravitationswelle bestimmt werden.

Unter der Annahme, daß sich Laser und Atom auf zwei benachbarten Geodäten bewegen, können wir die Christoffelsymbole $\Gamma_{\rho\sigma}^{\mu}(x+\Delta x)$ nach Δx entwickeln und finden so⁸ durch Bildung der Differenz von Gl. (5.13) und Gl. (5.14) eine Bewegungsgleichung für den raum-zeitlichen Abstand Δx^{μ} zwischen Laser und Atom

$$\frac{D^2 \Delta x^{\mu}}{D\tau^2} + R^{\mu}_{\beta\gamma\delta} \frac{dx^{\beta}}{d\tau} \Delta x^{\gamma} \frac{dx^{\delta}}{d\tau} = 0 \quad (5.16)$$

Das Symbol $\frac{DA^{\mu}}{D\tau}$ bezeichnet dabei die Ableitung des Vektorfeldes A^{μ} entlang einer Kurve, die durch den Parameter τ parametrisiert ist. Sie ist durch

$$\frac{DA^{\mu}}{D\tau} = \frac{dA^{\mu}}{d\tau} + \Gamma_{\rho\sigma}^{\mu} A^{\rho} \frac{dx^{\sigma}}{d\tau} \quad (5.17)$$

gegeben. Das Symbol $R^{\alpha}_{\beta\gamma\mu}$ bezeichnet den Riemann-Tensor

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\mu} = -\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma,\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu,\gamma} + \Gamma^{\sigma}_{\beta\mu} \Gamma^{\alpha}_{\sigma\gamma} - \Gamma^{\sigma}_{\beta\gamma} \Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu} \quad (5.18)$$

In Ref. 8 ist gezeigt worden, daß die Form von Gl. (5.16) invariant unter beliebigen Koordinatentransformationen bleibt und somit unabhängig von der Wahl des Systems ist. Deshalb wollen wir jetzt unser Koordinatensystem festlegen. Alle weiteren Rechnungen in diesem Kapitel werden wir in einem Bezugssystem durchführen, in dessen Ursprung der Laser zu allen Zeiten ruht. Ein solches Bezugssystem wird als Fermi-Normal-Koordinatensystem bezeichnet und ist in Ref. 60 studiert worden. Es hat einige sehr nützliche Eigenschaften, zu deren Ableitung wir auf Ref. 60 und Ref. 9 verweisen, und die wir hier jedoch ohne Beweis verwenden wollen.

In diesem Koordinatensystem verschwinden z.B. die Christoffelsymbole entlang der Geodäte des Lasers, d.h.

$$\Gamma_{\rho\sigma}^{\mu}(x_{\text{Laser}}) = 0 \quad ,$$

Gemäß Gl. (5.17) reduzieren sich somit alle kovarianten Ableitungen zu gewöhnlichen Ableitungen und Gl. (5.16) wird zu

$$\frac{d^2 \Delta x^\mu}{d\tau^2} + R^\mu_{\beta\gamma\delta} \frac{dx^\beta}{d\tau} \Delta x^\gamma \frac{dx^\delta}{d\tau} = 0. \quad (5.19)$$

Da der Laser im Ursprung des Koordinatensystems ruht, folgt

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = c \delta_{\mu,0}$$

und Gl. (5.19) wird dadurch zu

$$\frac{d^2 \Delta x^\mu}{dt^2} = - R^\mu_{0\nu 0} \Delta x^\nu, \quad (5.20)$$

wobei wir noch berücksichtigt haben, daß in diesem Bezugssystem die Koordinatenzeit x^0 identisch mit der Eigenzeit τ ist d.h.

$$x^0 = ct = c\tau.$$

Nun muß noch der Riemann Tensor für eine einfallende schwache Gravitationswelle bestimmt werden. Unter "schwach" verstehen wir, wie schon in Kapitel II erläutert wurde, daß die Metrik $g_{\mu\nu}$ nicht stark von der eben Raum-Zeit Metrik $\eta_{\mu\nu}$ abweicht und somit eine Zerlegung gemäß

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

mit

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

möglich ist und für die Korrekturterme $h_{\mu\nu}$ die Bedingung

$$|h_{\mu\nu}| \ll 1$$

gelten soll. Es werden daher maximal Beiträge linear in $h_{\mu\nu}$ berücksichtigt.

In dieser Schwachfeld-Näherung sind Gravitationswellen Lösungen der Wellengleichung⁴

$$\square^2 \phi^{\mu\nu} = 0$$

wobei

$$\phi^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} h^\alpha{}_\alpha \quad (5.21)$$

Das Feld

$$\phi^{\mu\nu} = h \varepsilon^{\mu\nu} \sin(\Omega t - Kx) \quad (5.22)$$

mit $K = \frac{\Omega}{c}$ beschreibt daher eine Gravitationswelle mit der Amplitude h , die sich entlang der x -Achse ausbreitet. Analog zu elektromagnetischen Wellen haben Schwerewellen zwei dynamische Freiheitsgrade⁸ und der Polarisationsvektor $\varepsilon^{\mu\nu}$ lautet gemäß Ref. 4

$$\varepsilon^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.23)$$

Im Anhang B wird gezeigt, daß der Riemann Tensor für eine Gravitationswelle von der Form (5.22) und (5.23) durch

$$R^\alpha{}_{0\nu 0} = -\frac{1}{2} h K^2 \sin(\Omega t - Kx) \varepsilon^{\alpha\lambda} \eta_{\lambda\nu} \quad (5.24)$$

gegeben ist. Einsetzen in Gl. (5.20) unter Berücksichtigung der Tatsache, daß der Riemann Tensor im Ursprung des Koordinatensystems, d.h. für $x = y = z = 0$ entwickelt werden muß, liefert schließlich

$$\frac{d^2 \Delta x^\mu}{dt^2} = \frac{1}{2} h \Omega^2 \sin \Omega t \varepsilon^{\mu\lambda} \eta_{\lambda\nu} \Delta x^\nu. \quad (5.25)$$

Im Fall $\mu = 0$ verschwindet wegen der besonderen Form von $\varepsilon^{\mu\nu}$ Gl. (5.23) die rechte Seite von Gl. (5.25). Andererseits ist $\Delta x^0 = ct$ und damit

$$\frac{d^2 \Delta x^0}{dt^2} = 0$$

Die Gleichung ist somit in diesem Fall trivialerweise erfüllt.

Wir wollen jetzt die räumlichen Koordinaten $j = 1, 2, 3$ diskutieren und nehmen dabei an, daß sich das Atom in Abwesenheit der Gravitationswelle

entlang der z-Achse bewegt. Bei Vernachlässigung von Termen der Ordnung h^2 folgt so aus Gl. (5.25)

$$\ddot{x} = \ddot{y} = 0$$

und

$$\ddot{z} = \frac{1}{2} h \Omega^2 z \sin \Omega t, \quad (5.26a)$$

Soweit haben wir lediglich die Bewegung eines einzelnen Atoms untersucht. Die Polarisation $P = P(t, z)$ jedoch wird, wie in Abschnitt 5.2 ausgeführt worden ist, von einem Ensemble von Atomen mit unterschiedlicher Geschwindigkeit erzeugt. Diese Tatsache werden wir durch die Einführung geeigneter Anfangsbedingungen berücksichtigen.

Wir nehmen dazu an, daß das elektrische Feld E zur Zeit $t = 0$ eingeschaltet wird. Zu diesem Zeitpunkt sei die räumliche Verteilung der Atome durch $n = n(z_0)$ gegeben, wobei z_0 die Anfangsposition eines Atoms bezeichne, d.h.

$$z(t=0) = z_0 \quad (5.27a)$$

Zu diesem Zeitpunkt besitzen die Atome die Geschwindigkeit

$$\dot{z}(t=0) = v_0$$

wobei sich die Anfangsgeschwindigkeit aus der thermischen Geschwindigkeit v_{th} und der durch die Gravitationswelle verursachten Geschwindigkeit v_{gr} zusammensetzt. Die Verteilung von v_{th} sei durch eine Verteilungsfunktion $W = W(v_{th})$ gegeben. Wir wollen in diesem Zusammenhang betonen, daß die Verteilungen n und W in dem Koordinatensystem gemessen werden, indem der Laser ruht. Benutzt man zur Rechnung ein anderes Koordinatensystem, so können diese Funktionen eine gänzlich andere Form annehmen. Diese Tatsache wurde bereits in Ref. 35 für eine ortsunabhängige Beschleunigung bewiesen.

Wir wollen uns jetzt der Form von v_{gr} zuwenden. Dazu lösen wir zunächst Gl. (5.26) in Abwesenheit der thermischen Bewegung mit der

Anfangsbedingung (5.27a). Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß die Amplitude der Gravitationswelle von der Größenordnung $h \sim 10^{-20}$ ist, finden wir

$$z(t) = z_0 (1 - \frac{1}{2} h \sin \Omega t).$$

Das Atom führt somit eine Schwingung um seine Ruhelage z_0 aus, wobei die Schwingungsamplitude durch $1/2 h z_0$ gegeben ist. Die Geschwindigkeit des Atoms ist dabei

$$\dot{z}(t) = -\frac{1}{2} h \Omega z_0 \cos \Omega t$$

d.h. $\dot{z}(t=0) = -\frac{1}{2} h \Omega z_0.$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich somit das Atom bei z_0 und hat daher maximale Geschwindigkeit. Die Wahl der Geschwindigkeit v_{gr} als

$$v_{gr} = -\frac{1}{2} h \Omega z_0$$

erscheint deshalb plausibel*. Die Anfangsgeschwindigkeit v_0 lautet dann

$$\dot{z}(t=0) = v_{th} - \frac{1}{2} h \Omega z_0. \quad (5.27b)$$

Wir halten fest, daß die Geschwindigkeit v_{gr} von der Anfangsbedingung z_0 abhängt. Da für diese eine Verteilungsfunktion n existiert, gibt es auch eine Verteilung für v_{gr} .

Die Lösung der Differentialgleichung (5.26) zu den Anfangsbedingungen (5.27a), (5.27b) sei mit $\bar{z}$ bezeichnet. Der Ansatz

$$\bar{z}(t) = z_0 + v_{th} \cdot t + \xi(t)$$

wobei ξ mindestens von der Ordnung h ist, reduziert Gl. (5.26) zu

$$\ddot{\xi} = \frac{1}{2} h \Omega^2 (z_0 + v_{th} t) \sin \Omega t, \quad (5.26b)$$

* In Ref. 117 wird der Fall einer beliebigen Anfangsgeschwindigkeit v_0 diskutiert, d.h. ohne Aufteilung von v_0 in v_{th} und v_{gr} . Man findet dieselben Ergebnisse wie in Abschnitt 5.6.2, lediglich die Beiträge $\xi_{\pm}$ in Gl. (6.10) nehmen eine andere Form an. Daher ändert sich auch nichts an dem Endresultat, daß thermische Geschwindigkeit nicht zu einer absoluten Verstärkung der Seitenbänder führt.

wobei wir Beiträge von der Ordnung h^2 vernachlässigt haben. Integration dieser Gleichung unter Verwendung der Randbedingungen (5.27a) und (5.27b) liefert

$$\begin{aligned} \bar{z}(t; z_0, v_{th}) = & v_{th} \cdot t + z_0 (1 - \frac{1}{2} h \sin \Omega t) \\ & - \frac{1}{2} h v_{th} t \sin \Omega t - h \frac{v_{th}}{\Omega} (\cos \Omega t - 1). \end{aligned} \quad (5.28)$$

Der erste Term berücksichtigt die thermische Bewegung der Atome, während der zweite deren Schwingung um die Ruhelage z_0 auf Grund der Gravitationswelle beschreibt. Man sieht die Charakteristika einer Gezeitenkraft. Darüberhinaus treten noch zusätzliche Beiträge auf, die proportional zu $h v_{th}$ sind. Diese rühren von der Tatsache her, daß in der Bewegungsgleichung (5.26) die Position z des Atoms auftaucht und nicht dessen ursprüngliche Position z_0 . Diese Terme wurden sowohl in Ref. 32 als auch in den Arbeiten von Bordé et al. ^{34,35} vernachlässigt. In unserer Methode werden sie voll berücksichtigt. Zusammenfassend stellen wir fest, daß bei thermischer Bewegung die Atome nicht nur eine lineare Superposition von thermischer Bewegung und Schwingung um die Ruhelage ausführen, sondern noch zusätzliche Beiträge auftreten, die von der thermischen Geschwindigkeit v_{th} herrühren.

Wir schließen diesen Abschnitt damit, die Geschwindigkeit $\bar{v} \equiv \dot{\bar{z}}$ der Atome

$$\begin{aligned} \bar{v}(t; z_0, v_{th}) = & v_{th} - \frac{1}{2} h \Omega z_0 \cos \Omega t \\ & - \frac{1}{2} h \Omega v_{th} t \cos \Omega t + \frac{1}{2} h v_{th} \sin \Omega t. \end{aligned} \quad (5.29)$$

anzugeben.

5.4 Bevölkerungsmatrix für beschleunigte Teilchen

Im vorgegangenen Abschnitt haben wir festgestellt, daß die Atome auf Grund der Gravitationswelle eine Beschleunigung relativ zum Laser erfahren. Da die halbklassische Theorie des Lasers von Lamb^{38,113} nur Atome mit konstanter Geschwindigkeit betrachtet, ist es nicht möglich, diese Theorie direkt auf dieses Problem anzuwenden. In diesem Abschnitt werden wir daher zunächst Lambs Theorie so erweitern, daß wir

auch Atome, die eine beliebige Beschleunigung erfahren, behandeln können. Später werden wir auf die von der Gravitationswelle verursachte Beschleunigung zurückgehen.

Zunächst wollen wir jedoch den Einfluß der Gravitationswelle auf das quantenmechanische System diskutieren. Dazu schätzen wir die Abweichung der Metrik $g_{\mu\nu}$ von der Metrik der ebenen Raum-Zeit $\eta_{\mu\nu}$ in einem Fermi-Normal-Koordinatensystem ab, in dem der Atomkern ruht. Im Anhang C zeigen wir, daß diese Korrekturen von der Größenordnung 10^{-48} und damit von der Ordnung $h^2_{\mu\nu}$ sind. Daher können wir den Einfluß der Gravitation auf den atomaren Anteil des Problems vernachlässigen und den bekannten, nichtrelativistischen Formalismus der Quantenmechanik benutzen. Somit können wir auch für die Wechselwirkung zwischen Atom und elektromagnetischem Feld E , den bekannten Dipolwechselwirkungsoperator

$$V_{ab}(t, \mathbf{z}) = - \wp E(t, \mathbf{z}) \quad (5.30)$$

annehmen, wobei $\wp$ das Dipolmatrixelement des Übergangs $a \rightarrow b$ bezeichnet.

Da auf Grund der Gravitationswelle die Metrik $g_{\mu\nu}$ von der der ebenen Raum Zeit abweicht, müssen zur Beschreibung der Ausbreitung der elektromagnetischen Welle E entlang der z -Achse die schon im Kapitel II behandelten allgemein relativistischen Maxwell Gleichungen herangezogen werden. Im Abschnitt 5.3 haben wir ein Koordinatensystem gewählt, in dem der Laser ruht. In diesem Bezugssystem muß daher die relativistische Eikonal Gleichung gelöst werden. Gemäß Anhang D finden wir für eine elektromagnetische Welle, die vom Ursprung ausgesandt wird und sich entlang der z -Achse ausbreitet

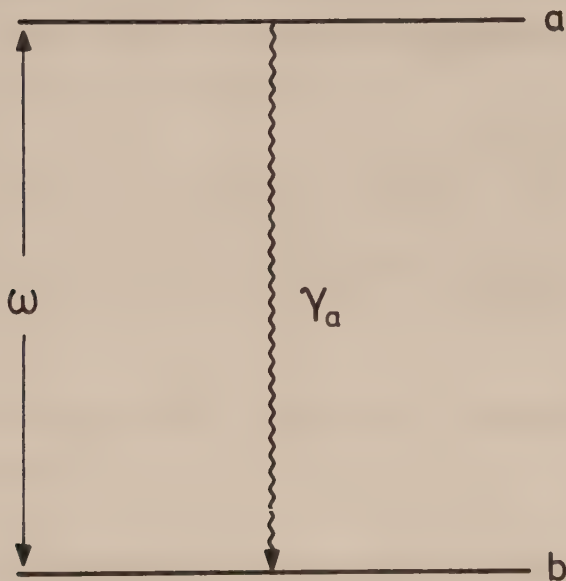
$$E(t, \mathbf{z}) = \frac{1}{2} \mathcal{E} e^{i(\nu t + \phi - k z)} e^{i S'} + c.c., \quad (5.31)$$

wobei die von der Gravitationswelle hervorgerufene Phasenverschiebung S' durch

$$S'(t, \mathbf{z}) = - \frac{1}{4} h k K^2 c^3 \int_0^{z/k} d\tau \tau^2 \sin [(\omega t - K z) + \omega \tau] \quad (5.32)$$

gegeben ist. Wir werden später zeigen, daß S' im Fall $(Kz) \ll 1$ gegen die von der Bewegung des Atoms verursachte Phasenverschiebung vernachlässigt werden kann.

Als Modell für das Gas im Resonator, oder des Atomstrahls benutzen wir ein Ensemble von Atomen mit den Energieniveaus a und b (siehe Fig. 18). Diese sollen einen Energieabstand $E_a - E_b = \hbar\omega$ haben und Übergänge seien nur zwischen diesen beiden Zuständen erlaubt. Die Atome zeigen weiter Relaxationsprozesse, die wir über phänomenologische Dämpfungskonstanten einführen. Dabei wollen wir annehmen, daß das atomare Dipolmoment mit der Rate γ zerfällt und daß das Atom auf Grund von spontaner Emission mit einer Rate γ_a vom angeregten Zustand a in den Grundzustand b übergeht. Ein Zerfall zu anderen Zuständen ist nicht



Figur 18: Das in diesem Kapitel verwendete Zwei-Niveau-Atom mit Zuständen a und b und Resonanzfrequenz ω . Die phänomenologische Zerfallskonstante γ_a berücksichtigt spontanen Zerfall des angeregten Zustands a in b .

möglich. Wir machen auch keine Aussage darüber, auf welche Weise die beiden Zustände a und b vor dem Einschalten des elektrischen Feldes bevölkert werden. Somit treten in diesem Modell keine Anregungsraten auf. Diese Form des Zwei-Niveau-Atoms unterscheidet sich daher entscheidend von dem in Ref. 32, 34 und 35 benutzten Modell, das neben dem Zerfall der Zustände a und b zu anderen Niveaus auch deren Bevölkerungsmechanismus berücksichtigt. In dieser Arbeit werden wir unter anderem zeigen, daß unser einfaches Modell dieselben Resultate liefert, als das komplizierte "Laser Zwei-Niveau-Atom".⁷⁸

Ein solches Ensemble von Zwei-Niveau-Atomen läßt sich am einfachsten durch eine 2x2 Dichtematrix beschreiben, in der die Diagonalelemente die Bevölkerung in den beiden Zuständen angeben, während die Nebendiagonalelemente proportional zum atomaren Dipolmoment sind ^{38,78}.

Die zeitliche Änderung der Elemente der Dichtematrix unter dem Einfluß der gerade diskutierten Relaxationsprozesse ist somit durch

$$\left(\frac{d}{dt} \rho_{aa} \right)_R = -\gamma_a \rho_{aa} \quad (5.33a)$$

$$\left(\frac{d}{dt} \rho_{bb} \right)_R = +\gamma_a \rho_{aa} \quad (5.33b)$$

$$\left(\frac{d}{dt} \rho_{ab} \right)_R = -\gamma \rho_{ab} \quad (5.33c)$$

gegeben. Die Addition der Gleichungen (5.33a) und (5.33b) zeigt die Erhaltung der Teilchenzahl.

Die gesamte zeitliche Entwicklung der Dichtematrix einschließlich der Wechselwirkung Gl. (5.30) ist durch die Neumannsche Gleichung

$$\frac{d\rho}{dt} = \left(\frac{d\rho}{dt} \right)_R - \frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}, \rho] \quad (5.34)$$

gegeben, wobei das Symbol $\mathcal{H}$ den Hamiltonoperator des Systems

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \hbar\omega_a & V_{ab} \\ V_{ab} & \hbar\omega_b \end{pmatrix}$$

bezeichnet. Wegen der Beschleunigung a der Atome lautet die in Gl. (5.34) auftretende vollständige Ableitung nach der Zeit

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial z} + a \frac{\partial}{\partial v}$$

Einsetzen des Hamiltonoperators $\mathcal{H}$ liefert so zusammen mit Gl. (5.33)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial z} + a \frac{\partial}{\partial v} + \gamma_a \right) \rho_{aa}(t, z, v) &= -\frac{i}{\hbar} \left(V_{ab}(t, z) \rho_{ba}(t, z, v) + \text{c.c.} \right) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial z} + a \frac{\partial}{\partial v} \right) \rho_{bb}(t, z, v) &= \gamma_a \rho_{aa}(t, z, v) + \frac{i}{\hbar} \left(V_{ab} \rho_{ba} + \text{c.c.} \right) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial z} + a \frac{\partial}{\partial v} + (\gamma + i\omega) \right) \rho_{ab}(t, z, v) &= \frac{i}{\hbar} V_{ab}(t, z) (\rho_{aa} - \rho_{bb}) \end{aligned} \quad (5.35)$$

wobei das Symbol V_{ab} die Wechselwirkung in der Resonanz-Näherung

$$V_{ab}(t, z) = -\frac{\hbar}{2} \mathcal{E} e^{-i(\nu t + \phi - kz + S'(t, z))} \quad (5.36)$$

bezeichnet. Wir wollen jetzt ein Ensemble von Atomen untersuchen, das zum Zeitpunkt $t = 0$ eine räumliche Verteilung n_λ von Atomen im Zustand λ ($\lambda = a, b$) hat und dessen Geschwindigkeitsverteilung durch w_λ gegeben ist.

Zur Lösung der Dichtematrix-Gleichung (5.35) definieren wir die Bevölkerungsmatrix

$$\rho_{\alpha\beta}(t, z, v) \equiv \sum_{\lambda=a,b} \int_{-\infty}^{\infty} dz_0 \int_{-\infty}^{\infty} dv_{th} n_\lambda(z_0) w_\lambda(v_{th}) \delta(z - \bar{z}) \delta(v - \bar{v}) \tilde{\rho}_{\alpha\beta}(t; t=0; \lambda; z_0, v_{th}) \quad (5.37)$$

wobei die Funktion $\bar{z} = \bar{z}(t, z_0, v_{th})$ die Lösung der Bewegungsgleichung

$$\ddot{\bar{z}} = a$$

zu den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} \bar{z}(t=0) &= z_0 \\ \dot{\bar{z}}(t=0) &= v_0(z_0, v_{th}) \end{aligned}$$

ist. Die Anfangsgeschwindigkeit v_0 kann dabei, wie in unserem Fall (Gl. 5.27b) eine Funktion von z_0 und v_{th} sein. Die Größe v erhalten wir aus z durch Differentiation nach der Zeit, d.h.

$$v = \dot{z}$$

Im Falle der Beschleunigung der Atome auf Grund der Gravitationswelle Gl. (5.26), entsprechen den obigen Anfangsbedingungen die Gleichungen (5.27a) and (5.27b).

Durch Einsetzen von Gl. (5.37) in Gl. (5.35) finden wir sofort ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen für die Größen $\tilde{\rho}_{\alpha\beta}$, das auch deren Abhängigkeit von den Parametern λ , z_0 und v_{th} erklären wird.

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} + \gamma_a\right) \tilde{\rho}_{aa} &= -\frac{i}{\hbar} \left(\mathcal{V}_{ab}(t, \bar{z}) \tilde{\rho}_{ba} + c.c. \right) \\ \frac{d}{dt} \tilde{\rho}_{bb} &= \gamma_a \tilde{\rho}_{aa} + \frac{i}{\hbar} \left(\mathcal{V}_{ab}(t, \bar{z}) \tilde{\rho}_{ba} + c.c. \right) \\ \left(\frac{d}{dt} + (\gamma + i\omega)\right) \tilde{\rho}_{ab} &= \frac{i}{\hbar} \mathcal{V}_{ab}(t, \bar{z}) (\tilde{\rho}_{aa} - \tilde{\rho}_{bb}) \end{aligned}$$

Als formale Lösung dieses Systems erhalten wir

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{aa}(t; t=0, \lambda, z_0, v_{th}) &= -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' e^{-\gamma_a(t-t')} \left[\mathcal{V}_{ab}(t', \bar{z}') \tilde{\rho}_{ba}(t'; t=0, \lambda, z_0, v_{th}) \right. \\ &\quad \left. + c.c. \right] + \delta_{\lambda,a} \tilde{\rho}_{aa}(0) e^{-\gamma_a t} \\ \tilde{\rho}_{bb}(t; t=0, \lambda, z_0, v_{th}) &= +\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' e^{-\gamma_a(t-t')} \left[\mathcal{V}_{ab}(t', \bar{z}') \tilde{\rho}_{ba}(t'; t=0, \lambda, z_0, v_{th}) \right. \\ &\quad \left. + c.c. \right] + \delta_{\lambda,b} \tilde{\rho}_{bb}(0) + \delta_{\lambda,a} \tilde{\rho}_{aa}(0) (1 - e^{-\gamma_a t}) \\ \tilde{\rho}_{ab}(t; t=0, \lambda, z_0, v_{th}) &= \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' e^{-(\gamma + i\omega)(t-t')} \mathcal{V}_{ab}(t', \bar{z}') \left[\right. \\ &\quad \left. \cdot [\tilde{\rho}_{aa}(t'; t=0, \lambda, z_0, v_{th}) - \tilde{\rho}_{bb}(t'; t=0, \lambda, z_0, v_{th})] \right] \end{aligned} \quad (5.38)$$

wobei der Ausdruck z' durch

$$\bar{z}' \equiv \bar{z}(t=t'; z_0, v_{th})$$

definiert ist. In dem Beispiel der Beschleunigung auf Grund der Gravitationswelle ist dieser Ausdruck gemäß Gl. (5.28) durch

$$\bar{z}' = v_{th} \cdot t' + z_0 (1 - \frac{1}{2} h \sin \Omega t') - \frac{1}{2} h v_{th} \cdot t' \sin \Omega t' - h \frac{v_{th}}{\Omega} (\cos \Omega t' - 1) \quad (5.39)$$

gegeben. Da die Funktion z , die von den Parametern z_0 und v_{th} abhängt, in der Wechselwirkung $\mathcal{V}_{ab}$ auftritt, müssen die Größen $\tilde{\rho}_{\alpha\beta}$ eine Funktion von z_0 und v_{th} sein. Der Parameter λ dient zur Kennzeichnung von Atomen, die sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand λ befinden.

Gleichung (5.38) zeigt, daß das elektrische Feld $E = \frac{1}{2} \mathcal{E} e^{-i(\nu t + \phi - k z)} + c.c.$ zwei Phasenverschiebungen erfährt. Eine ist die im Anhang D behandelte Verschiebung S' , die von der Wechselwirkung zwischen Gravitationswelle und elektromagnetischer Welle herrührt, die andere wird verursacht durch die Bewegung der Atome. Abschließend wollen wir diese beiden Beiträge miteinander vergleichen.

Aus Gl. (5.32) finden wir sofort die Abschätzung

$$|S'(t, z)| \leq \frac{1}{2} h k z (K z)^2.$$

Die durch die Bewegung des Atoms verursachte Phasenverschiebung enthält, wie man aus Gl. (5.39) sieht, einen Beitrag $1/2 h k z_0 \sin \Omega t$. Er unterscheidet sich somit betragsmäßig von S' durch den Faktor $(Kz)^2$. Für $(Kz) \ll 1$ (z.B. $K \cong 10^{-6} \text{ 1/m}$ und $z = 10^3 \text{ m}$) kann daher die Phasenverschiebung auf Grund der Wechselwirkung zwischen Gravitationswelle und elektromagnetischer Welle gegen diejenige von der Bewegung der Atome vernachlässigt werden. Als Wechselwirkungsoperator können wir deshalb den Ausdruck

$$\mathcal{V}_{ab}(t, z) = - \frac{q}{2} \mathcal{E} e^{-i(\nu t + \phi - k z)} \quad (5.40)$$

benutzen.

5.5 Absorptionsproblem

Im letzten Abschnitt haben wir den von Lamb entwickelten Formalismus der Bevölkerungsmatrix auf beschleunigte Atome ausgedehnt. In diesem Kapitel wollen wir diese Technik zur Lösung der Dichtematrixgleichung (5.35) anwenden.

Wir beginnen zunächst damit, die Anfangsbedingung für ρ festzulegen. Da wir es mit einem Absorptionsproblem zu tun haben, ist es nahe-
liegend anzunehmen, daß beim Einschalten des elektrischen Feldes E ,
d.h. zum Zeitpunkt $t = 0$, alle Atome im Grundzustand b sind. Damit
folgt für die Verteilungsfunktionen n_λ und W_λ sofort

$$n_\lambda(z) = n(z) \delta_{\lambda,b} \quad (5.41)$$

$$W_\lambda(\nu) = W(\nu) \delta_{\lambda,b} \quad (5.42)$$

und

$$\tilde{\rho}_{aa}(t=0) = 0 \quad (5.43a)$$

$$\tilde{\rho}_{bb}(t=0) = 1. \quad (5.43b)$$

In den folgenden Abschnitten dieses Kapitels werden wir zwei Beispiele für n und W diskutieren, nämlich

- 1) den Fall von N Atomen, die sich zum Zeitpunkt $t = 0$ am Ort $z_0 = \ell$ befinden, d.h.

$$n(z_0) = N \delta(z_0 - \ell) \quad (5.4)$$

und keine thermische Bewegung ausführen, d.h.

$$W(\nu_n) = \delta(\nu_n) . \quad (5.6)$$

2) Das Problem einer homogenen Verteilung der Atome entlang der z-Achse, d.h.

$$n = n_0 \quad (5.5)$$

Diese Verteilung dient oft als Modell für einen Resonator, bei dem Reflexionen von den Wänden vernachlässigt werden. Die Länge des Resonators und dessen Position im Raum geht ein, wenn über das Volumen des Resonators integriert wird. Die Verteilung (2) wurde sowohl in Ref. 32 als auch in Ref. 35 benutzt.

Im Abschnitt 5.1.2 haben wir die Frage aufgeworfen, inwiefern die Berücksichtigung der thermischen Bewegung eine Verbesserung der Sensitivität des Detektors gegenüber dem Fall ohne thermischer Bewegung darstellt. Daher werden wir in diesem Fall für W sowohl eine Boltzmannverteilung, d.h.

$$W(v_{th}) = \frac{1}{\sqrt{\pi} u} e^{-\left(\frac{v_{th}}{u}\right)^2} \quad (5.1)$$

zu Grunde legen, wobei die mittlere Geschwindigkeit u durch Gl. (5.2) gegeben ist, als auch den Grenzfall einer deltafunktionsartigen Verteilung Gl. (5.6) behandeln.

Durch Einsetzen von Gl. (5.41), (5.42) in Gl. (5.37) finden wir sofort

$$\rho_{\alpha\beta}(t, z, v) = \int_{-\infty}^{\infty} dz_0 \int_{-\infty}^{\infty} dv_{th} n(z_0) W(v_{th}) \delta(z - \tilde{z}) \delta(v - \tilde{v}) \tilde{\rho}_{\alpha\beta}(t; t=0, b; z_0; v_{th}) \quad (5.44)$$

Mit Hilfe der Deltafunktionen können wir jetzt die Integrationen über z_0 und v_{th} ausführen und finden gemäß Anhang E

$$\rho_{\alpha\beta}(t, z, v) = n(\tilde{z}) W(\tilde{v}) \tilde{\rho}_{\alpha\beta}(t; t=0; b; z_0 = \tilde{z}(t); v_{th} = \tilde{v}) \quad (5.45)$$

wobei

$$\tilde{z}(t) \equiv z \left(1 + \frac{1}{2} h \sin \Omega t - \frac{1}{2} h \Omega t \cos \Omega t\right) - vt \left(1 - \frac{1}{2} h \sin \Omega t\right) + h \frac{v}{\Omega} (\cos \Omega t - 1) \quad (5.46)$$

$$\tilde{v}(t) \equiv v \left(1 - \frac{1}{2} h \sin \Omega t\right) + \frac{1}{2} h \Omega z \cos \Omega t. \quad (5.47)$$

Wir wollen jetzt auf die Bedeutung der Argumente von $\rho_{\alpha\beta}$ in Gl. (5.45) eingehen.

Schon in Abschnitt 5.4 haben wir festgestellt, daß auf Grund der Bewegung der Atome gemäß Gl. (5.39) die Dichtematrix $\tilde{\rho}$ von den Anfangsbedingungen z_0 und v_{th} abhängt. Da wir wegen der Deltafunktionen in z und v diese Integrationen ausführen konnten, muß in Gl. (5.39) jedes z_0 durch $\tilde{z}$ und jedes v_{th} ersetzt werden, d.h.

$$\begin{aligned} \tilde{z}'(t'; z_0 = \tilde{z}(t); v_{th} = \tilde{v}(t)) = \\ = z - v(t-t') + \frac{1}{2}h\{\tilde{z}(\sin\Omega t - \sin\Omega t') + 2\frac{v}{\Omega}(\cos\Omega t - \cos\Omega t') \\ - \Omega\tilde{z}\cos\Omega t(t-t') + v(t-t')(\sin\Omega t + \sin\Omega t')\} \equiv \tilde{z}' \quad , \quad (5.48) \end{aligned}$$

Die Komponenten der Dichtematrix $\tilde{\rho}_{\alpha\beta}(t; t=0, b, z_0=\tilde{z}, v_{th}=\tilde{v})$ folgen somit aus Gl. (5.38) zu

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{aa}(t; t=0, b; \tilde{z}, \tilde{v}) &= -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' e^{-\gamma_a(t-t')} [\mathcal{V}_{ab}(t', \tilde{z}') \tilde{\rho}_{ba} + c.c.] \\ \tilde{\rho}_{bb}(t; t=0, b; \tilde{z}, \tilde{v}) &= 1 + \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' e^{-\gamma_a(t-t')} [\mathcal{V}_{ab}(t', \tilde{z}') \tilde{\rho}_{ba} + c.c.] \\ \tilde{\rho}_{ab}(t; t=0, b; \tilde{z}, \tilde{v}) &= \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' e^{-(\gamma + i\omega)(t-t')} \mathcal{V}_{ab}(t', \tilde{z}') (\tilde{\rho}_{aa} - \tilde{\rho}_{bb}) \end{aligned} \quad (5.49)$$

wobei wir noch die Anfangsbedingungen (5.43) berücksichtigt haben. Die Lösung der Dichtematrix-Gleichungen (5.35) ist somit durch Gl. (5.45) zusammen mit Gl. (5.46) und (5.47) gegeben, wobei die Komponenten der Dichtematrix $\tilde{\rho}$ aus Gl. (5.49) folgen.

5.6 Störungstheorie nach der Wechselwirkung

In diesem Abschnitt berechnen wir die durch Gl. (5.49) gegebenen Größen $\tilde{\rho}_{ab}$. Die dort angegebene Lösung ist jedoch nur eine formale Lösung, da die Gleichungen noch immer gekoppelt sind. Da keine Methode

zur Entkopplung bekannt zu sein scheint, bleibt nur die Störungstheorie. Ausgehend von nullter Ordnung, d.h. ohne Wechselwirkung mit dem elektrischen Feld ($\mathcal{V}_{ab} = 0$),

$$\tilde{\rho}_{aa}^{(0)}(t; t=0, b, \tilde{z}, \tilde{v}) = 0 \quad (5.50a)$$

$$\tilde{\rho}_{bb}^{(0)}(t; t=0, b, \tilde{z}, \tilde{v}) = 1 \quad (5.50b)$$

finden wir durch Iteration eine Lösung in beliebiger Ordnung in der Wechselwirkung $\mathcal{V}_{ab}$. Da wir an der Absorption des Lichts interessiert sind, beschränken wir uns in dieser Arbeit auf die Berechnung von ρ_{ab} in erster und dritter Ordnung, d.h.

$$\rho_{ab}^{(1)}(t; t=0, b, \tilde{z}, \tilde{v}) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' e^{-(\gamma+i\omega)(t-t')} \mathcal{V}_{ab}(t'; \tilde{z}') \quad (5.51a)$$

$$\rho_{ab}^{(3)}(t; t=0, b, \tilde{z}, \tilde{v}) = \frac{2i}{\hbar^3} \int_0^t dt''' \int_0^{t'''} dt'' \int_0^{t''} dt' e^{-(\gamma+i\omega)(t-t''')} \mathcal{V}_{ab}(t'''; \tilde{z}''') \cdot \{ \mathcal{V}_{ab}(t''; \tilde{z}'') \mathcal{V}_{ab}^*(t'; \tilde{z}') \exp -[\gamma-i\omega](t''-t') + c.c. \} e^{-\gamma(t''-t'')} \quad (5.51b)$$

Die Ausdrücke $\tilde{z}''$ bzw. $\tilde{z}'''$ sind durch Gl. (5.48) gegeben, wobei die Integrationsvariable t' durch t'' bzw. t''' zu ersetzen ist.

In diesem Abschnitt werden wir ausgehend von diesen Lösungen die Form von $\rho = \rho(t, z, v)$ diskutieren.

5.6.1 Störungstheorie nullter Ordnung

Diese Ordnung der Störungstheorie ist für die Berechnung der von den Atomen absorbierten Leistung nicht von Bedeutung, da keine Wechselwirkung zwischen den Atomen und dem elektrischen Feld vorliegt. Jedoch zeigt sie einen interessanten Effekt, der immer bei ortsabhängigen Beschleunigungen auftritt, nämlich die scheinbare Nichterhaltung der Teilchenzahl.

Zunächst setzen wir Gl. (5.50) in Gl. (5.45) ein, und finden so

$$\rho_{aa}^{(0)}(t, z, v) = 0 \quad (5.52a)$$

und

$$\rho_{bb}^{(0)}(t, z, v) = n(\tilde{z}) W(\tilde{v}), \quad (5.52b)$$

wobei

$$\tilde{z} = z(1 + \frac{1}{2} h \sin \Omega t - \frac{1}{2} h \Omega t \cos \Omega t) - vt(1 - \frac{1}{2} h \sin \Omega t) + h \frac{v}{\Omega} (\cos \Omega t - 1) \quad (5.46)$$

$$\tilde{v} = v(1 - \frac{1}{2} h \sin \Omega t) + \frac{1}{2} h \Omega z \cos \Omega t. \quad (5.47)$$

Hieraus erkennen wir, daß unter dem Einfluß der Gravitationswelle und bei Abwesenheit eines elektrischen Feldes, keine Atome vom Grundzustand in den angeregten Zustand übergehen. Jedoch ändert sich auf Grund der Beschleunigung der Atome deren räumliche Verteilung und deren Geschwindigkeitsverteilung. Dies wollen wir jetzt an den schon mehrmals erwähnten Beispielen für die Verteilungsfunktionen $n = n(z)$ und $W = W(v_{th})$ erläutern.

Wir beginnen mit dem Fall von N Atomen, die sich zur Zeit $t = 0$ bei $z_0 = l$ befinden und keine thermische Bewegung ausführen, d.h.

$$n(z_0) = N \delta(z_0 - l) \quad (5.4)$$

und

$$W(v_{th}) = \delta(v_{th}). \quad (5.6)$$

Einsetzen dieser Verteilung in Gl. (5.52b) liefert nach kurzer Rechnung*

* Unter Vernachlässigung von Beiträgen der Ordnung h^2 und Benutzung der bekannten Relationen

$$\begin{aligned} \delta(a f(x)) &= \frac{1}{a} \delta(f(x)) \\ f(x) \delta(x-a) &= f(a) \delta(x-a) \end{aligned}$$

finden wir aus Gl. (5.52b)

$$\begin{aligned} \rho_{bb}^{(0)} &= n(\tilde{z}) \delta(\tilde{v}) = n(\tilde{z}) \delta\left(v + \frac{1}{2} h \Omega z \cos \Omega t\right) (1 - \frac{1}{2} h \sin \Omega t) \\ &= n(\tilde{z}) (1 + \frac{1}{2} h \sin \Omega t) \delta\left(v + \frac{1}{2} h \Omega z \cos \Omega t\right) = \\ &= n\left(z + \frac{1}{2} h z \sin \Omega t\right) (1 + \frac{1}{2} h \sin \Omega t) \delta\left(v + \frac{1}{2} h \Omega z \cos \Omega t\right). \end{aligned}$$

Einsetzen von Gl. (5.4) liefert wegen

$$\delta\left(z - l(1 - \frac{1}{2} h \sin \Omega t)\right) (1 + \frac{1}{2} h \sin \Omega t) = (1 - \frac{1}{2} h \sin \Omega t) \delta\left(z - l(1 - \frac{1}{2} h \sin \Omega t)\right)$$

das Ergebnis Gl. (5.53).

$$\rho_{bb}^{(0)}(t, z, v) = N \delta(z - l(1 - \frac{1}{2} h \sin \Omega t)) \delta(v + \frac{1}{2} h \Omega z \cos \Omega t). \quad (5.53)$$

Dieses Ergebnis ist auch sofort plausibel. Da neben der Gravitationswelle keine äußeren Kräfte angreifen, schwingen die Atome um ihre Ruhelage l . Die Position der Atome z und deren Geschwindigkeit v ist über die Deltafunktionen festgelegt und ist durch die im Abschnitt 5.3 diskutierte Bewegung in Abwesenheit von Brownscher Bewegung gegeben.

Diese Schwingung der Atome verursacht eine zeit- und ortsabhängige Teilchenzahldichte

$$n(t, z) = N \delta(z - l(1 - \frac{1}{2} h \sin \Omega t)) \quad (5.54)$$

Durch Integration über die Geschwindigkeit v und die Position z finden wir die Anzahl der Atome N . Dabei müssen wir jedoch beachten, daß das Integrationsgebiet die Teilchen enthält, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dv \rho_{bb}^{(0)}(t, z, v) = N$$

Wir wenden uns jetzt dem Fall einer homogenen Verteilung der Atome zu, d.h.

$$n(z_0) \equiv n_0, \quad (5.5)$$

wobei wir zunächst thermische Bewegung ausschließen wollen, d.h.

$$W(v_{th}) = \delta(v_{th}),$$

Durch Einsetzen dieser Relationen in Gl. (5.52b) folgt analog zu den Rechnungen in der Fußnote auf der Seite davor

$$\rho_{bb}^{(0)}(t, z, v) = n_0 \left(1 + \frac{1}{2} h \sin \Omega t \right) \delta \left(v + \frac{1}{2} h \Omega z \cos \Omega t \right). \quad (5.55)$$

Die Geschwindigkeit der Atome ist, wie im zuvor diskutierten Fall, durch die Schwingung der Atome um die Ruhelage gegeben. Die Teilchenzahldichte

$$n(t) \equiv n_0 \left(1 + \frac{1}{2} h \sin \Omega t \right) \quad (5.56)$$

ist zwar zeitabhängig, nicht aber ortsabhängig, da die Verteilung homogen und somit translationsinvariant ist.

Wir haben schon mehrmals erwähnt, daß die Verteilungsfunktion (5.5) ein Modell für einen Resonator darstellt, bei dem Reflexionen von den Wänden vernachlässigt werden. Unter Benutzung von Gl. (5.55) wollen wir jetzt die Anzahl der Teilchen bestimmen, die sich in einem Resonator der Länge L befinden und dessen Zentrum bei $z = 0$ liegt. Integration von Gl. (5.55) liefert so

$$\int_{-L/2}^{L/2} dz \int_{-\infty}^{\infty} dv \rho_{bb}^{(0)}(t, z, v) = n_0 L \left(1 + \frac{1}{2} h \sin \Omega t \right)$$

d.h. die Anzahl der Atome im Resonator ist zeitabhängig, und bleibt somit nicht erhalten. Wir wollen zunächst einmal klären, woher diese Zeitabhängigkeit kommt. Dazu untersuchen wir den Fall eines Resonators mit Länge L dessen eine Ende am Ursprung des Koordinatensystems liegt. Wir betrachten anstelle der homogenen Ladungsverteilung der Einfachheit halber, zwei Teilchen, die sich zum Zeitpunkt $t = 0$ am Ursprung bzw. bei $z = L$ befinden. Somit sind für $t = 0$ zwei Teilchen im Resonator. Da die Schwingungsamplitude der Atome nach Gl. (5.28) proportional zu ihrer Ausgangsposition ist, bleibt das Teilchen am Ursprung in Ruhe, während das bei $z = L$ zu schwingen anfängt. Da im obigen Resonatormodell Reflexionen von den Wänden vernachlässigt werden, schwingt dieses Teilchen aus dem Resonator heraus und betritt ihn wieder. Dadurch ist die Teilchenzahl offensichtlich nicht erhalten. Diese Überlegung zeigt, daß eine solche "scheinbare" Nichterhaltung der Teilchenzahl immer auftreten muß, wenn die Atome eine ortsabhängige Beschleunigung erfahren.

Dieses Problem läßt sich jedoch in dem Beispiel der durch die Gravitationswelle induzierten Beschleunigung umgehen, wenn wir berücksichtigen, daß auf Grund der Gezeitenkraft auch die Enden $l_{\pm}$ des Resonators gemäß

$$l_{-} \equiv (l - \frac{1}{2}h)(1 - \frac{1}{2}h \sin \Omega t)$$

und

(5.57)

$$l_{+} \equiv (l + \frac{1}{2}h)(1 - \frac{1}{2}h \sin \Omega t)$$

schwingen. Führen wir die Integration von Gl. (5.54) mit diesen zeitabhängigen Randbedingungen durch, so finden wir

$$\int_{l_{-}(t)}^{l_{+}(t)} dz \int_{-\infty}^{\infty} dv \rho_{bb}^{(0)}(t, z, v) = m_0 L$$

und somit die Erhaltung der Teilchenzahl. Daher ist im Fall der Gravitationswelle und frei beweglichen Resonatorenenden dieses Problem (zumindest theoretisch*) geklärt.

Die zeitabhängige Änderung der Resonatorlänge ist für die Berechnung der absorbierten Leistung von Bedeutung. In Abschnitt 5.2 haben wir nämlich gezeigt, daß dabei über die gesamte Länge des Mediums integriert werden muß. Diese ist somit zeitabhängig und durch $l_{\pm}$ festgelegt. Werden diese Randbedingungen (5.57) nicht benutzt, so finden wir auf Grund der zeitabhängigen Teilchenzahldichte (5.56) künstliche Beiträge zu den Seitenbändern bei den Frequenzen $\nu_0 \pm \Omega$, die von der Nichterhaltung der Teilchenzahl herrühren.

Wir wollen diesen Abschnitt abschließen mit der Diskussion einer homogenen Verteilung der Atome Gl. (5.5), die eine beliebige, jedoch normierbare Geschwindigkeitsverteilung $W = W(v_{th})$ besitzen, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dv_{th} W(v_{th}) = 1 .$$

In diesem Fall folgt aus den Gl. (5.52b) und (5.47)

$$\rho_{bb}^{(0)}(t, z, v) = m_0 W\left(v(1 - \frac{1}{2}h \sin \Omega t) + \frac{1}{2}h \Omega z \cos \Omega t\right) .$$

* Hierbei haben wir den Einfluß des Lichtdrucks auf die Spiegel vernachlässigt.

Auch in diesem Beispiel kann, wie man sich durch Integration dieser Gleichung leicht überzeugt, die Teilchenzahl nur erhalten bleiben, wenn die Randbedingungen (5.57) verwendet werden.

5.6.2 Störungstheorie höherer Ordnung und Diskussion

Nach dieser Diskussion der freien Dichtematrixgleichungen, d.h. jedoch bei Berücksichtigung der einfallenden Gravitationswelle, wollen wir jetzt die Wechselwirkung mit einem elektrischen Feld E betrachten. Dabei beschränken wir uns in diesem Abschnitt auf die Wechselwirkung mit nur einem Feld, nämlich dem Pumpfeld E_0 . Im Abschnitt 5.7 werden wir zeigen, inwiefern diese Überlegungen bei Berücksichtigung des Testfeldes zu modifizieren sind. Gemäß Gl. (5.40) ist somit der Wechselwirkungsoperator durch

$$V_{ab}(t, z) = - \frac{e}{2} \mathcal{E}_0 e^{-i(\nu_0 t + \phi_0 - k_0 z)} \quad (5.58)$$

gegeben. Aus dem Abschnitt 5.2 ist bekannt, daß wir zur Berechnung der von den Atomen absorbierten Leistung die über die Geschwindigkeitsverteilung gemittelten Nebendiagonalelemente der Dichtematrix ρ_{ab} benötigen, d.h.

$$\rho_{ab}(t, z) = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \rho_{ab}(t, z, \nu) .$$

Mit Hilfe der Gln. (5.45) und (5.51a) folgt erster Ordnung in der Wechselwirkung

$$\rho_{ab}''(t, z) = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu n(\tilde{z}(t, z, \nu)) W(\tilde{\nu}(t, z, \nu)) \int_0^t dt' e^{-(\gamma + i\omega)(t-t')} V_{ab}(t'; \tilde{z}'(t', z, \nu))$$

wobei die Größen $\tilde{z}$, $\tilde{\nu}$ und $\tilde{z}'$ durch die Gl. (5.46), (5.47) und (5.48) gegeben ist.

In Störungstheorie dritter Ordnung muß gemäß Gl. (5.45) und (5.51b) das Integral

$$\begin{aligned} \rho_{ab}^{(3)}(t, z) = & \frac{2i}{\hbar^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \, n(\tilde{z}(t, z, \nu)) W(\tilde{\nu}(t, z, \nu)) \int_0^t dt''' \int_0^{t'''} dt'' \int_0^{t''} dt' e^{-i(\gamma + i\omega)(t-t''')} \\ & \nu_{ab}(t'''; \tilde{z}''') [\nu_{ab}(t''; \tilde{z}'') \nu_{ab}^*(t'; \tilde{z}') e^{-i(\gamma - i\omega)(t''-t')} + \text{c.c.}] e^{-i\gamma(t''-t'')} \end{aligned} \quad (5.60)$$

ausgewertet werden. Dabei sind die Größen $\tilde{z}''$ und $\tilde{z}'''$ analog zu Gl. (5.48) definiert, wobei die Integrationsvariable t' durch t'' bzw. t''' zu ersetzen ist.

Diese Integrale werden in den Anhängen F und G für die schon im Abschnitt 5.6.1 diskutierten Beispiele der Verteilungsfunktionen n und W berechnet. Wir wollen hier nur die Ergebnisse angeben und verweisen auf die detaillierte Ableitung in den Anhängen. In allen Beispielen betrachten wir der Einfachheit halber den Fall der Resonanz des Pump-laser mit den Atomen.

Wir behandeln zunächst den Fall ohne thermischer Geschwindigkeit und beginnen mit einer deltafunktionsartigen räumlichen Verteilung der Atome gemäß Gl. (5.4). Nach den Anhängen F und G finden wir so

$$\begin{aligned} \rho_{ab}(t, z) = & \rho_{ab}^{(1)}(t, z) + \rho_{ab}^{(3)}(t, z) = \\ & = iN \delta(z-l(1-\frac{1}{2}h\sin\Omega t)) \left\{ e^{-i(\nu_0 t + \phi_0 - k_0 l)} \frac{1}{\mu_0(1-I)} \frac{1}{\gamma} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{4}h k_0 l\right) \sum_{s=\pm 1} s e^{-i[(\nu_0 - s\Omega)t + \phi_0 - k_0 l]} \frac{(-1)}{\mu_0(1-I)} \frac{1}{\gamma + is\Omega} \right\} \end{aligned} \quad (5.61a)$$

wobei wir noch den sogenannten Sättigungsparameter

$$I \equiv \frac{8^2 c_0^2}{\hbar^2} \frac{1}{\gamma \gamma_a} \quad (5.62)$$

eingeführt haben.

Bei einer homogenen räumlichen Verteilung der Atome gemäß Gl. (5.5) erhalten wir

$$\rho_{ab}(t, z) = i n_0 (1 + \frac{1}{2} h \sin \Omega t) \left\{ e^{-i(\nu_0 t + \phi_0 - k_0 z)} \mu_0 (1 - I) \frac{1}{\gamma} + \right. \\ \left. + (\frac{1}{4} h k_0 z) \sum_{s=\pm 1} s e^{-i[(\nu_0 - s\Omega)t + \phi_0 - k_0 z]} \mu_0 (1 - I) \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma + i s \Omega} \right) \right\}. \quad (5.61b)$$

Wir wollen jetzt am Beispiel dieser räumlichen Verteilung den Einfluß der thermischen Geschwindigkeit untersuchen. Während jedoch die Gln. (5.61a) und (5.61b) für beliebige Positionen z gültig sind, wollen wir dieses Ergebnis der Einfachheit halber nur für Atome angeben, die einen so großen Abstand zum Laser haben, daß wir die Beiträge $h\nu$ in den Gln. (F.9) und (6.5) dagegen vernachlässigen können.

Um die Eigenschaft der Gezeitenkraft auszunutzen, wird man in einem etwaigen Experiment einen möglichst großen Abstand zwischen Laser und Resonator wählen. Daher entspricht diese Näherung, die auch in Ref. 32 und 35 benutzt wurde, den experimentellen Gegebenheiten. Wir haben im Anhang F für den Fall der Störungstheorie erster Ordnung diese Näherung fallengelassen und das exakte Resultat berechnet. Auch bei der Störungstheorie dritter Ordnung haben wir bis zum Schluß die vollständige Bewegung der Atome berücksichtigt und erst dann diese Näherung gemacht.

Insgesamt finden wir in dieser Näherung

$$\rho_{ab}(t, z) = i n_0 (1 + \frac{1}{2} h \sin \Omega t) \left(\frac{\gamma}{k_0 u} \right) \sqrt{\pi} \left\{ e^{-i(\nu_0 t + \phi_0 - k_0 z)} \mu_0 (1 - \frac{1}{2} I) \frac{1}{\gamma} + \right. \\ \left. + (\frac{1}{4} h k_0 z) \sum_{s=\pm 1} s e^{-i[(\nu_0 - s\Omega)t + \phi_0 - k_0 z]} \mu_0 \left[\frac{1}{\gamma} \frac{2 i s \Omega}{k_0 u} \frac{1}{\sqrt{\pi}} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} I \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma + i s \Omega} \left(1 + \frac{i s \Omega (2\gamma_a + i s \Omega)}{(2\gamma + i s \Omega)(\gamma_a + i s \Omega)} \right) \right) \right] \right\} \quad (5.61c)$$

Wir wollen jetzt die obigen Ergebnisse miteinander vergleichen und die im Abschnitt 5.1.2 aufgeworfenen Fragen diskutieren.

Die zeitliche Entwicklung der Nebendiagonalelemente und damit der Polarisation ist in allen drei Fällen durch die Frequenzen ν_0 , $\nu_0 \pm \Omega$ festgelegt. Die Höhe der Seitenbänder bei den Frequenzen $\nu_0 \pm \Omega$ ist proportional zu dem sogenannten Modulationsindex $(1/4 h k_0 \ell)$ bzw. $(1/4 h k_0 z)$. Dieser ist proportional zum Abstand zwischen Laser und Atom, d.h. zu ℓ bzw. z und gibt so den Charakter der Gezeitenkraft wieder*. Wir halten außerdem fest, daß die Polarisation, wie schon in der Lambschen Theorie, proportional zu Teilchenzahldichte ist. Auf Grund der Schwingung der Atome ist diese jedoch zeitabhängig und durch die Gl. (5.54) bzw. (5.56) festgelegt. Im Fall von thermischer Bewegung ist die Teilchendichte (5.55) durch den Vorfaktor $(\frac{\gamma}{k_0 u})$ modifiziert, der daher rührt, daß auf Grund des Doppler Effekts nicht alle Atome der Verteilung absorbieren können, sondern nur die des "Bennett Lochs". Somit ist wegen $\frac{\gamma}{k_0 u} \ll 1$ die Höhe der Seitenbänder kleiner als in Abwesenheit von Brownscher Bewegung.

Ein Vergleich von Gl. (5.61a) mit den bekannten Ergebnissen der Lambschen Theorie im Mehrmodenfall zeigt die Äquivalenz zu einem Dreimodenproblem, wobei neben dem Pumpfeld E_0 noch zwei zusätzliche, schwache Felder mit Frequenzen $\nu_0 \pm \Omega$ und Amplituden $\pm(1/4 h k_0 \ell)$ auftreten. Der einzige Unterschied liegt in der zeitabhängigen Teilchendichte Gl. (5.55).

Der Fall der homogenen Verteilung von Atomen bei Abwesenheit von thermischer Bewegung ist wegen des zusätzlichen Beitrags $1/\gamma$ nicht äquivalent zu einem Dreimodenproblem. Aus Gl. (F.4) folgt, daß dieser Term von der besonderen Form der räumlichen Verteilung der Atome herrührt und nicht, wie in Ref. 35 behauptet, von einer Überlagerung von Pump- und Testfeld.

Wir wollen jetzt die Frage nach der in Ref. 32 diskutierten Verstärkung beantworten. Dazu beschränken wir uns lediglich auf die Seitenbänder. Zum besseren Vergleich bringen wir diese in Gl. (5.61c) auf eine einfachere Form.

* Wie wir in den Anhängen F und G gezeigt haben, treten auf Grund der Terme $h\nu_{th}$ in der Bewegungsgleichung (5.26b) auch Beiträge zu ρ_{ab} auf, die unabhängig von z sind. Diese können unter der Annahme, daß sich der Laser weit entfernt von den Atomen befindet, vernachlässigt werden.

Im Abschnitt 5.1.2 haben wir gezeigt, daß die Breite der Resonanz bei der Frequenz ν_0 durch γ gegeben ist. Um davon die Resonanzen bei den Seitenbändern $\nu_0 \pm \Omega$ unterscheiden zu können, muß daher die Beziehung $\gamma \ll \Omega$ gelten.

In Ref. 78 ist gezeigt worden, daß für das in Fig. 18 dargestellte Zwei-Niveau-Atom die Beziehung $\gamma \equiv \gamma_a$ gilt. Daher ist die Bedingung $\gamma, \gamma_a \ll \Omega$ physikalisch interessant und wir finden aus Gl. (5.61b) und (5.61c)

$$\rho_{ab}(\nu_H=0) \sim (1 - I) \quad (5.63a)$$

$$\rho_{ab}(\nu_H \neq 0) \sim (\varepsilon - \frac{1}{2}I) \quad (5.63b)$$

wobei

$$\varepsilon \equiv i \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{s\Omega}{k_0 u} .$$

Jetzt sind wir in der Lage, die Frage nach der in Ref. 32 behaupteten Verstärkung zu klären. Dazu betrachten wir in allen drei Beispielen das Verhältnis δ , das aus den Beiträgen der Störungstheorie erster und dritter Ordnung gebildet wird. Wir beschränken uns dabei auf die Seitenbänder bei $\nu_0 \pm \Omega$, d.h.

$$\delta \equiv \frac{|\rho_{ab}^{(3)}(\nu_0 \pm \Omega)|}{|\rho_{ab}^{(1)}(\nu_0 \pm \Omega)|}$$

Nach den Gl.n. (5.61a) und (5.61b) ist dieses Verhältnis im Fall von Atomen, die keine thermische Geschwindigkeit haben, durch den Sättigungsparameter I gegeben. Da dieser zugleich der Entwicklungsparameter der Störungstheorie ist, ist er kleiner als eins. In Abwesenheit von thermischer Bewegung ist somit die Höhe der Seitenbänder im wesentlichen durch den Beitrag erster Ordnung gegeben. Diese Aussage bleibt auch in der Näherung $\gamma, \gamma_a \ll \Omega$ richtig.

Zur Diskussion des Einflusses der thermischen Bewegung benutzen wir jetzt Gl. (5.63b). Hieraus finden wir für das Verhältnis

$$\delta = \sqrt{\pi} \frac{k_0 u}{\Omega} \frac{I}{4} . \quad (5.64)$$

Einsetzen des Sättigungsparameters I (Gl. (5.62)) führt bis auf den

Faktor $\frac{1}{2}$ auf das in Ref. 32 angegebene Ergebnis Gl. (5.3). Bringt also die Hinzunahme der thermischen Geschwindigkeit in der Tat diesen Verstärkungseffekt und damit eine Steigerung der Höhe der Seitenbänder?

Dazu vergleichen wir in Gl. (5.63a) und (5.63b) jetzt die Beiträge der Störungstheorie gleicher Ordnung. Die Beiträge dritter Ordnung sind dabei, (bis auf den Faktor $1/2$) gleich, während sich die Beiträge erster Ordnung um den Faktor unterscheiden. Für eine typische Gravitationswelle mit $\Omega \sim 10^3$ Hz und mit $k_0 = 10^6$ 1/m, $u = 10^3$ m/sec finden wir $\varepsilon \sim 10^{-6}$. Somit ist im Fall von Atomen mit thermischer Geschwindigkeit der Beitrag erster Ordnung verschwindend klein, d.h. der erste nicht verschwindende Beitrag ist der dritter Ordnung. Der Verstärkungseffekt beruht daher lediglich auf der Tatsache, daß in diesem Fall der Beitrag der Störungstheorie niedrigster (d.h. erster) Ordnung (nahezu) verschwindet. Wir erkennen auch, daß damit keine absolute Steigerung der Höhen der Seitenbänder verbunden ist, da der nicht verschwindende Beitrag dritter Ordnung immer noch kleiner ist, als der erster Ordnung im Fall von Atomen ohne thermischer Geschwindigkeit.

Abschließend sei noch auf die interessante Tatsache hingewiesen, daß im Fall von Atomen ohne thermischer Geschwindigkeit, die Höhe der Seitenbänder nahezu unabhängig von der Intensität des Pumpfeldes ist, während bei Brownscher Bewegung wegen des Verschwindens des Beitrags erster Ordnung, diese ganz empfindlich von I abhängt. Nur in diesem Sinne kann der folgende Satz aus Ref. 32

"The sensitivity of the detector increases significantly if there is saturation..."

verstanden werden.

5.7 Absorbierte Leistung

Im letzten Abschnitt haben wir die Wechselwirkung eines beschleunigten Atoms mit einem starken Pumpfeld untersucht. Dabei konnten wir alle im Abschnitt 5.1.2 aufgeworfenen Fragen beantworten. Mit der Berechnung der in den Seitenbändern absorbierten Leistung wollen wir dieses Kapitel schließen.

In dem in Abschnitt 5.1.3 diskutierten Experiment wechselwirkt das Atom nicht nur mit dem Pumpfeld E_0 , sondern auch noch mit Testfeld E_1 .

Der zugehörige Wechselwirkungsoperator in Resonanznäherung ist somit nicht durch Gl. (5.40), sondern durch

$$V_{ab}(t, z) = - \frac{e}{2} \sum_{\mu=0}^1 \mathcal{E}_{\mu} e^{-i(\nu_{\mu}t + \phi_{\mu} - k_{\mu}z)}$$

gegeben, wobei wir für die Felder die Form von Gl. (5.9) bzw. (5.10) angenommen haben.

Um das vollständige Experiment aus dem Abschnitt 5.1.3 diskutieren zu können, müssen alle Rechnungen aus Abschnitt 5.6.2 mit diesem Wechselwirkungsoperator wiederholt werden. Wie wir sehen werden, ist dies jedoch nicht notwendig.

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir gezeigt, daß sich die Nebendiagonalelemente der Dichtematrix als Summe zweier Beiträge schreiben lassen. Der erste beschreibt die bekannte Wechselwirkung von Zwei-Niveau Atomen mit einem elektrischen Feld für den Fall der zeitabhängigen Teilchendichten Gl. (5.54) bzw. (5.56). Bei Berücksichtigung des Testfeldes geht daher dieser Beitrag in den der gesättigten Absorptionsspektroskopie über. Dieser ist detailliert in einer Arbeit von Haroche und Hartmann¹¹⁸ behandelt worden und wir verweisen hier nur auf diese Ergebnisse.

Bevor wir zur Diskussion des zweiten Beitrags übergehen, müssen wir nochmals auf die zeitabhängigen Teilchendichten zu sprechen kommen. Diese sind wegen $\Omega \ll \nu_0$ ($\Omega \approx 10^3$ Hz, $\nu_0 \approx 10^{15}$ Hz) auf der optischen

Zeitskala langsam veränderlich. Daher können wir die zur Berechnung der absorbierten Leistung notwendige Zeitableitung der Teilchenzahldichte gegen die der optischen Felder vernachlässigen. Nach Gl. (5.12) muß sodann noch über die Länge des Medium integriert werden. Berücksichtigen wir die im Abschnitt 5.6.1 diskutierte Änderung der Integrationsgrenzen Gl. (5.57), so verschwindet die Zeitabhängigkeit in der Teilchendichte und wir finden das in Ref. 117 behandelte und von h unabhängige Absorptionsspektrum.

Wir wenden uns jetzt dem Beitrag zu, der den Einfluß der Gezeitenkraft auf das Spektrum beschreibt und daher proportional zu (hkz) ist. Auch bei diesem Term müssen wir die Modifizierung auf Grund des Testfeldes untersuchen. Da dieses lediglich zum "Auslesen" der vom Pumpfeld erzeugten Polarisation dient und diese nicht beeinflussen soll, ist es viel schwächer als E_0 . Da die Seitenbänder proportional zu $h \sim 10^{-20}$ sind, wollen wir hier den Einfluß des Testfeldes gegen den des Pumpfeldes vernachlässigen. Damit ist die Form des Absorptionsspektrums geklärt. Im Fall einer Boltzmann Verteilung für die Geschwindigkeit der Atome besteht es aus dem im Abschnitt 5.1.2 diskutierten Doppler Profil mit dem "eingebrannten Loch" bei $\nu_0 = \nu_1$. Die Höhe der Seitenbänder bei den Frequenzen $\nu_0 \pm \Omega$ ist dann durch

$$W = 2\sqrt{\pi} \left(\frac{1}{4} h k_0 L \right) 2\mu_1 \mu_2 I m_0 \left(\frac{\gamma}{k_0 u} \right) \sum_{s=\pm 1} s \delta_{\nu_1, \nu_0 - s\Omega} \hbar (\nu_0 - s\Omega) \\ \text{Re} \left\{ e^{i(\phi_1 - \phi_0)} \left[\frac{1}{2\gamma\gamma_a} - \frac{1}{\gamma_a(2\gamma_a + is\Omega)} - \frac{1}{(\gamma_a + is\Omega)(2\gamma + is\Omega)} + \frac{1}{2(\gamma_a + is\Omega)(\gamma + is\Omega)} \right] \right\}$$

gegeben, wobei wir einen Resonator der Länge L angenommen haben, dessen Zentrum sich bei $z = \ell$ befindet. Dieses Resultat ist bis auf einen Phasenfaktor s/i identisch mit dem Resultat in Ref. 35. Die Abweichung in der Phase rührt daher, daß wir eine sinusförmige Beschleunigung benutzt haben, während in Ref. 35 eine kosinusförmige zu Grunde gelegt wurde. In Ref. 35 wird weiterhin gezeigt, daß dieser Ausdruck in den von Nesterikhin et al. ³² übergeht.

Zusammenfassend stellen wir fest, daß unsere Ergebnisse sowohl mit denen von Nesterikhin et al.³² als auch mit denen der Gruppe in Paris übereinstimmen. Unsere Interpretation dagegen ist grundverschieden von der, die in diesen Arbeiten dargelegt wurde.

Anhang A: Ableitung der Wellengleichung

Zur Ableitung der Wellengleichung (2.17) geben wir von den ladungsstromfreien Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (A1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (A2)$$

und den "Material-Gleichungen"

$$\vec{D} = (1 - \frac{1}{2}(\chi+1)h_{00}) \vec{E} - c \vec{B} \times \vec{h} \quad (A3)$$

$$\vec{B} = (1 - \frac{1}{2}(\chi+1)h_{00}) \vec{H} + \frac{1}{c} \vec{E} \times \vec{h} \quad (A4)$$

aus. Analog zur klassischen Elektrodynamik bilden wir $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E})$ und finden so aus Gl. (A2)

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \quad (A5)$$

Zur Berechnung von $(\vec{\nabla} \times \vec{B})$ lösen wir zunächst Gl. (A4) nach $\vec{H}$ auf

$$\vec{H} = (1 + \frac{1}{2}(\chi+1)h_{00}) \vec{B} + \frac{1}{c} \vec{h} \times \vec{E}$$

und setzen dies zusammen mit Gl. (A3) in Gl. (A1) ein.

$$\vec{\nabla} \times [(1 + \frac{1}{2}(\chi+1)h_{00}) \vec{B} + \frac{1}{c} \vec{h} \times \vec{E}] = [1 - \frac{1}{2}(\chi+1)h_{00}] \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \times \vec{h} ,$$

Unter Verwendung der Identität

$$\vec{\nabla} \times (u \vec{G}) = u \vec{\nabla} \times \vec{G} + \vec{\nabla} u \times \vec{G}$$

für einen Skalar u und den Vektor $\vec{G}$, folgt

$$\begin{aligned} (1 + \frac{1}{2}(\chi+1)h_{00}) \vec{\nabla} \times \vec{B} + \frac{1}{2}(\chi+1)(\vec{\nabla} h_{00} \times \vec{B}) + \frac{1}{c} \vec{\nabla} \times (\vec{h} \times \vec{E}) = \\ = [1 - \frac{1}{2}(\chi+1)h_{00}] \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \times \vec{h} . \end{aligned}$$

Auflösen nach $(\vec{\nabla} \times \vec{B})$ ergibt

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = [1 - (\gamma+1)h_{00}] \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{2}(\gamma+1) \vec{\nabla} h_{00} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \vec{\nabla} \times (\vec{h} \times \vec{E}) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \times \vec{h}$$

wodurch sich Gl. (A5) zu

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E} = & -(1 - (\gamma+1)h_{00}) \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{1}{2}(\gamma+1) \vec{\nabla} h_{00} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ & + \frac{1}{c} \vec{\nabla} \times \vec{h} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \times \vec{h} . \end{aligned} \quad (A6)$$

reduziert.

Im nächsten Schritt berechnen wir jetzt den Ausdruck $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$. Dazu setzen wir die Materialgleichung (A3) in die Maxwell-Gleichung (A1) ein und finden unter Benutzung der Vektorrelationen

$$\vec{\nabla} \cdot (u \vec{G}) = u \vec{\nabla} \cdot \vec{G} + \vec{G} \cdot \vec{\nabla} u$$

und

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{G}_1 \times \vec{G}_2) = \vec{G}_2 \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{G}_1) - \vec{G}_1 \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{G}_2)$$

für einen Skalar u und Vektoren $\vec{G}$, $\vec{G}_1$ und $\vec{G}_2$, die Beziehung

$$0 = [1 - \frac{1}{2}(\gamma+1)h_{00}] \vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \frac{1}{2}(\gamma+1)(\vec{\nabla} h_{00} \cdot \vec{E}) - c \vec{h} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + c \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{h}) .$$

Auflösen nach $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ liefert schließlich

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2}(\gamma+1)(\vec{\nabla} h_{00} \cdot \vec{E}) + \frac{1}{c} \vec{h} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - c \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{h})$$

wobei wir noch

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + o(h) \quad (A7)$$

ausgenutzt haben. Von diesem Ausdruck muß nun noch der Gradient gebildet werden, was sich gemäß der Beziehung

$$\vec{\nabla} (\vec{G}_1 \cdot \vec{G}_2) = (\vec{G}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{G}_2 + (\vec{G}_2 \cdot \vec{\nabla}) \vec{G}_1 + \vec{G}_1 \times (\vec{\nabla} \times \vec{G}_2) + \vec{G}_2 \times (\vec{\nabla} \times \vec{G}_1)$$

leicht ausführen läßt.

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = & \frac{1}{2}(\gamma+1) \{ (\vec{\nabla} h_{00} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} + (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} h_{00} + \vec{\nabla} h_{00} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} h_{00}) \} \\ & + \frac{1}{c} \{ (\vec{h} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + (\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{\nabla}) \vec{h} + \vec{h} \times (\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times (\vec{\nabla} \times \vec{h}) \} \\ & - c \{ (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) (\vec{\nabla} \times \vec{h}) + [(\vec{\nabla} \times \vec{h}) \cdot \vec{\nabla}] \vec{B} + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{h})) + (\vec{\nabla} \times \vec{h}) \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \} \end{aligned} \quad (A.8)$$

Diese komplizierte Gleichung soll im Weiteren etwas vereinfacht werden, wobei wir die unterstrichenen Ausdrücke untersuchen werden.

Zunächst folgt wegen $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} h_{00}) = 0$, sofort

$$\vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} h_{00}) = 0.$$

Sodann wenden wir uns dem Term $\vec{B} \times [\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{h})]$ zu. Dabei benutzen wir zunächst die Beziehung

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{h}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{h}) - \vec{\nabla}^2 \vec{h}. \quad (A9)$$

In der Elektrodynamik wird das Vektorpotential $\vec{A}$ oft der Eichbedingung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

unterworfen. Wie im Abschnitt 3.4 näher erläutert ist, kann man auch für die Metrik, insbesondere für den Vektor $\vec{h}$ die Beziehung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{h} = 0 \quad (A10)$$

fordern*. Damit wird Gl. (A9) zu

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{h}) = -\vec{\nabla}^2 \vec{h}.$$

Die Einsteinschen Feldgleichungen lassen sich für die im Abschnitt 2.3 diskutierte Metrik so umschreiben, daß sie analog den Potentialgleichungen der Elektrodynamik lauten. So ist in Ref. 4 gezeigt, daß für den Vektor $\vec{h}$ die Beziehung

$$\vec{\nabla}^2 \vec{h} = -\kappa c \vec{j}$$

gilt, wobei κ die Einsteinsche Gravitationskonstante und $\vec{j}$ den Massenstrom bezeichnen. Damit erhalten wir

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{h}) = \kappa c \vec{j}.$$

Wollen wir das elektrische Feld nur außerhalb der Massenverteilung beschreiben, d.h. in Bereichen in denen der Massenstrom gleich Null ist,

* Diese Bedingung erhält man aus der sogenannten harmonischen Eichung

$$(h^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} h^{\rho}_{\rho}),_{,\nu} = 0$$

für den Fall $\mu = 0$ und der Tatsache, daß nur zeitunabhängige Gravitationsfelder untersucht werden, d.h. $h^{\mu\nu}_{,0} = 0$.

so folgt

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{h}) = 0$$

und damit

$$\vec{B} \times [\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{h})] = 0.$$

Durch Anwendung von Gl. (A7) lassen sich zwei Terme von Gl. (A8) gemäß

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times (\vec{\nabla} \times \vec{h}) + c (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times (\vec{\nabla} \times \vec{h}) = \frac{2}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times (\vec{\nabla} \times \vec{h})$$

zusammenfassen.

Durch Anwendung des Induktionsgesetzes (A2) finden wir auch noch

$$\frac{1}{c} \vec{h} \times \left(\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = - \frac{1}{c} \vec{h} \times \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

Dieser Term wird sich später gegen einen entsprechenden Ausdruck heben. Mit diesen Ergebnissen finden wir aus Gl. (A6) nach Einsetzen von Gl. (A8)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\gamma+1) [(\vec{\nabla} h_{00} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} + (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} h_{00} + \vec{\nabla} h_{00} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E})] + \\ & + (\vec{h} \cdot \vec{\nabla}) \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{h} + \frac{2}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times (\vec{\nabla} \times \vec{h}) - c (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) (\vec{\nabla} \times \vec{h}) - \\ & - c [(\vec{\nabla} \times \vec{h}) \cdot \vec{\nabla}] \vec{B} - \vec{\nabla}^2 \vec{E} = \\ & - [1 - (\gamma+1) h_{00}] \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{1}{2}(\gamma+1) \vec{\nabla} h_{00} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ & + \frac{1}{c} \vec{\nabla} \times \left(\vec{h} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (A11)$$

Es ist nützlich den Term $\vec{\nabla} \times \left(\vec{h} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$ gemäß der Vektorrelation

$$\vec{\nabla} \times (\vec{G}_1 \times \vec{G}_2) = (\vec{G}_2 \cdot \vec{\nabla}) \vec{G}_1 - (\vec{G}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{G}_2 + \vec{G}_1 (\vec{\nabla} \cdot \vec{G}_2) - \vec{G}_2 (\vec{\nabla} \cdot \vec{G}_1)$$

umzuformen

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \vec{\nabla} \times \left(\vec{h} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) &= \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{h} - (\vec{h} \cdot \vec{\nabla}) \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{h} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{h}) = \\ &= \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{h} - (\vec{h} \cdot \vec{\nabla}) \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Eichbedingung (A10) und die Tatsache

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = O(h)$$

benutzt haben. Einsetzen in Gl. (A11) liefert so

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \vec{E} &= (\gamma+1) h_{00} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{1}{2} (\gamma+1) (\vec{\nabla} h_{00} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} - \frac{1}{2} (\gamma+1) (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} h_{00} \\ &- (\gamma+1) \vec{\nabla} h_{00} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - 2(\vec{h} \cdot \vec{\nabla}) \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{2}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times (\vec{\nabla} \times \vec{h}) \\ &+ c(\vec{B} \cdot \vec{\nabla})(\vec{\nabla} \times \vec{h}) + c[(\vec{\nabla} \times \vec{h}) \cdot \vec{\nabla}] \vec{B} . \end{aligned}$$

Zur Ableitung dieser Wellengleichung haben wir bisher lediglich die Schwachfeld-Näherung benutzt, d.h. wir haben nur Terme berücksichtigt die linear in $h_{\mu\nu}$ sind. Außerdem haben wir die Rechnung in einer bestimmten Eichung durchgeführt und angenommen, daß das Licht nicht in Bereiche kommt, in denen der Massenstrom von Null verschieden ist.

Berücksichtigen wir noch, daß sich die Gravitationsfelder auf einer Länge der optischen Wellenlänge kaum ändern, d.h.

$$|(\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} h_{00}| \ll |(\vec{\nabla} h_{00} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}|$$

und

$$|(\vec{B} \cdot \vec{\nabla})(\vec{\nabla} \times \vec{h})| \ll |((\vec{\nabla} \times \vec{h}) \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}| ,$$

so reduziert sich die obige Wellengleichung in niedrigster geometrisch-optischer Näherung⁷³ zu Gl. (2.17).

Anhang B

=====

Berechnung des Riemann Tensors für eine schwache Gravitationswelle

In diesem Anhang wollen wir die Komponenten $R^\alpha_{0\nu0}$ des Riemann Tensors für eine schwache Gravitationswelle berechnen, die sich entlang der x-Achse ausbreiten soll.

In der Schwachfeld-Näherung, d.h. unter Vernachlässigung von Termen der Ordnung $h^2_{\mu\nu}$, reduziert sich der Riemann-Tensor (Gl.(5.18)) zu

$$R^\alpha_{\beta\nu\mu} = -\Gamma^\alpha_{\beta\nu,\mu} + \Gamma^\alpha_{\beta\mu,\nu}$$

wobei die Christoffelsymbole (Gl. (5.15)) durch

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\rho} (h_{\rho\mu,\nu} + h_{\rho\nu,\mu} - h_{\mu\nu,\rho})$$

gegeben ist. Unter Berücksichtigung der speziellen Form des Polarisationsensors $\epsilon^{\mu\nu}$

$$\epsilon^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

ist es leicht, die Gültigkeit der Beziehung

$$R^\alpha_{0\nu0} = -\frac{1}{2} \eta^{\alpha\rho} h_{\rho\nu,00}$$

zu zeigen. Die Gl. (5.21) liefert einen Zusammenhang zwischen $\phi^{\mu\nu}$ und $h^{\mu\nu}$

$$\phi^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} h^\alpha_{\alpha}$$

woraus wir durch Summation über μ die Beziehung

$$\phi^\mu_{\mu} = h^\mu_{\mu} - \frac{1}{2} \eta^\mu_{\mu} h^\alpha_{\alpha} = -h^\alpha_{\alpha}$$

finden. Wegen Gl. (B.1) folgt somit

$$\phi^\mu{}_\mu = -h^\mu{}_\mu = 0$$

und daher

$$\phi^{\mu\nu} = h^{\mu\nu}.$$

Unter Benutzung der Relation

$$h_{\mu\nu} = -\eta_{\mu\rho} h^{\rho\sigma} \eta_{\sigma\nu} \quad (\text{B.2})$$

die durch Substitution in die Gleichung

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\rho} = (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})(\eta^{\nu\rho} + h^{\nu\rho}) = \delta_\mu^\rho$$

nachgeprüft werden kann, erhalten wir

$$R^\alpha{}_{0\nu 0} = \frac{1}{2} \phi^{\alpha\lambda}{}_{,00} \eta_{\lambda\nu}. \quad (\text{B.3})$$

Durch Einsetzen von Gl. (5.22)

$$\phi^{\mu\nu} = h \varepsilon^{\mu\nu} \sin(\Omega t - Kx)$$

in Gl. (B.3) finden wir somit

$$R^\alpha{}_{0\nu 0} = -\frac{1}{2} h K^2 \sin(\Omega t - Kx) \varepsilon^{\alpha\lambda} \eta_{\lambda\nu}. \quad (\text{B.4})$$

Anhang C

=====

Einfluß der Gravitationswelle auf die Quantenmechanik

Im Abschnitt 5.4 haben wir zur Beschreibung der Zustände der Atome die wohlbekannten Dichtematrixgleichungen benutzt, die jedoch nicht kovariant sind. Wir haben somit den Einfluß der Gravitationswelle auf das Innere des Atoms vernachlässigt. Dieselbe Haltung wurde auch in der Arbeit von Nesterikhin und Mitarbeitern³² eingenommen, in der zu diesem Thema die folgende Feststellung auftaucht:³²

"Because the perturbations of the metric produced by the gravitational wave are small, the co-variant differentiation can be replaced by ordinary differentiation."

Nesterikhin und Mitarbeiter gehen somit von einer kovarianten Dichtematrix-Gleichung aus, die jedoch nicht angegeben wird⁺). Unter der Annahme, daß die durch die Gravitationswelle hervorgerufenen Störungen klein sind, ersetzen sie alle kovarianten Ableitungen durch gewöhnliche und finden so zu den bekannten Dichtematrix-Gleichungen zurück. Zu diesem Vorgehen sind jedoch etliche Bemerkungen angebracht.

Es erhebt sich sofort die Frage, was unter einer "kleinen" Störung zu verstehen ist. Im Abschnitt 5.3 haben wir bereits gesehen, daß diese von der Ordnung $h \sim 10^{-20}$, also in der Tat sehr klein ist. Andererseits kann sie nicht einfach vernachlässigt werden, da sie ja zu der schon mehrmals angesprochenen Schwingung der Testmassen um ihre Ruhelage führt. Daher ist diese Argumentation so nicht richtig. Im Weiteren wollen wir mit einer einfachen Überlegung zeigen, daß in der Tat der Einfluß der Gravitationswelle auf die Dichtematrix-Gleichungen vernachlässigt werden kann.

Da diese das Atom auf mikroskopischem Niveau beschreiben, müssen wir zur Klärung dieser Frage lediglich die Änderung der Metrik auf Grund der Gravitationswelle im Inneren eines Atoms untersuchen. Dies legt

⁺) Eine solche Gleichung wurde von Ph. Tourrenc^{34a} vorgeschlagen und findet sich auch in Ref. 35.

nahe, ein Fermi-Normal-Koordinatensystem zu benutzen, in dem der Atomkern ruht. Gemäß Ref. 60 ist in einem solchen Koordinatensystem die Korrektur $h_{\mu\nu}$ zur Metrik der ebenen Raum-Zeit- $\eta_{\mu\nu}$ durch

$$\begin{aligned} |h_{00}| &= R_{0j0k} x^j x^k \\ |h_{0k}| &= 2/3 R_{0jkm} x^j x^m \\ |h_{sk}| &= 1/3 R_{sjkm} x^j x^m \end{aligned}$$

gegeben, wobei der Riemann-Tensor entlang der Geodäte des Atomkerns zu nehmen ist. Gemäß Anhang B können die Komponenten R_{sjkm} durch hK^2 abgeschätzt werden, wobei h die Schwingungsamplitude und K den Wellenvektor der Gravitationswelle bezeichnen. Somit liegt die Störung $h_{\mu\nu}$ der Metrik im Inneren eines Atoms in der Größenordnung von

$$|h_{\mu\nu}| \sim h (Kr)^2$$

wobei r eine typische Distanz im Atom, z.B. den Radius des Atoms, bezeichnet. Für eine typische Gravitationswelle mit $K = 10^{-4} \text{ m}^{-1}$ und bei der Wahl von $r = 10^{-10} \text{ m}$ finden wir $Kr \sim 10^{-14}$, d.h.

$$|h_{\mu\nu}| \sim h^2 \sim 10^{-48}.$$

Dies zeigt, daß der Einfluß der Gravitationswelle auf das Innere des Atoms vernachlässigt werden und die bekannten, nicht kovarianten Dichtematrix-Gleichungen benutzt werden können.

Anhang D

=====

Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen in Anwesenheit einer Gravitationswelle

In diesem Anhang wollen wir den Einfluß einer Gravitationswelle auf die Ausbreitung einer elektromagnetischen Welle untersuchen.

Nesterikhin und Mitarbeiter³² schreiben zu dieser Problematik in einer Fußnote lediglich:

"Estimates using the above values for the parameters of the gravitational wave and the adsorbing cavity show that the influence of the gravitational wave on the frequency of the laser radiation is unimportant."

Wir werden in diesem Anhang durch Lösen der relativistischen Eikonal-Gleichung die Wirkung einer Gravitationswelle auf eine Lichtwelle untersuchen und die dabei induzierte Phasenverschiebung in dem Fermi-Normal-Koordinatensystem, in dem der Laser ruht, ableiten.

Da sich die Gravitationsfelder nicht stark auf der Länge einer optischen Wellenlänge ändern⁹, reicht zur Beschreibung der Ausbreitung einer elektromagnetischen Welle mit der Amplitude $\vec{E}_0$ und der Phase S

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{iS} \quad (D.1)$$

die relativistische Eikonal-Gleichung⁹

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} = 0 \quad (D.2)$$

In der Schwachfeld-Näherung ist die Metrik $g_{\mu\nu}$ von der Form

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad ,$$

wobei $\eta_{\mu\nu}$ die Metrik der ebenen Raum-Zeit bezeichnet und für die Korrekturterme $h_{\mu\nu}$ die Beziehung $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ gilt. Zur Lösung von Gl. (D.2) versuchen wir den Ansatz

$$S = k_\alpha x^\alpha + S^{(1)} \quad (D.3)$$

mit

$$k_\alpha \cdot k^\alpha = 0 \quad (D.4)$$

Dabei wollen wir annehmen, daß der Beitrag $S^{(1)}$ mindestens von der Ordnung $h_{\mu\nu}$ ist. Einsetzen dieses Ansatzes in Gl. (D.2) liefert unter Benutzung von Gl. (D.4) und bei Vernachlässigung von Beiträgen der Größenordnung $h_{\mu\nu}^2$,

$$k^\mu \frac{\partial S^{(1)}}{\partial x^\mu} = -\frac{1}{2} h^{\mu\nu} k_\mu k_\nu.$$

Wir benutzen jetzt die im Anhang B abgeleitete Beziehung (B.2)

$$h^{\mu\nu} = -\eta^{\mu\rho} h_{\rho\sigma} \eta^{\sigma\nu},$$

die die obige Gleichung auf die Form

$$k^\mu \frac{\partial S^{(1)}}{\partial x^\mu} = \frac{1}{2} h_{\mu\nu} k^\mu k^\nu$$

bringt. In dem im Abschnitt 5.1.3 diskutierten Experiment breitet sich das Licht entlang der z-Achse aus. Der Viererwellenvektor k^μ ist somit durch

$$k^\mu = (v/c, 0, 0, k)$$

mit $v/c = \lambda$ gegeben, woraus wir folgende Gleichung für die Phase $S^{(1)}$ erhalten

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \right) S^{(1)}(t, z) = \frac{1}{2} (h_{00} + 2h_{03} + h_{33}) k \quad (D.5)$$

Dabei müssen die metrischen Fundamentalkoeffizienten $h_{\mu\nu}$ entlang der z-Achse, d.h. für $x=y=0$ genommen werden. Da wir die Ausbreitung in einem Fermi-Normal-Koordinatensystem beschreiben, sind diese durch ⁶⁰

$$\begin{aligned} h_{00}(t, x=0, y=0, z) &= -R_{0303} z^2 \\ h_{03}(t, x=0, y=0, z) &= 2/3 R_{0333} z^2 \\ h_{33}(t, x=0, y=0, z) &= -1/3 R_{3333} z^2 \end{aligned}$$

gegeben. Der Riemann-Tensor ist im Ursprung des Koordinatensystems zu entwickeln, d.h. $x = y = z = 0$. Aus der Symmetriebeziehung⁸

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu}$$

finden wir sofort

$$R_{0333} = R_{3333} = 0$$

und damit

$$h_{03} = h_{33} = 0. \quad (D.6)$$

Die Komponente R_{0303} läßt sich aus der Symmetrierelation

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu}$$

zusammen mit Gl. (B.3) zu

$$R_{0303} = 1/2 h K^2 \sin \Omega t$$

bestimmen, und wir finden so

$$h_{00} = -\frac{1}{2} h K^2 \sin \Omega t z^2. \quad (D.7)$$

Durch Einsetzen von Gl. (D.6) und (D.7) erhalten wir die gesuchte Wellengleichung

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \right) S^{(1)}(t, z) = -\frac{1}{4} h K^2 \sin(\Omega t) z^2. \quad (D.8)$$

Diese Gleichung muß jetzt unter der für das Experiment geeigneten Randbedingung gelöst werden. Um diese zu finden, erinnern wir uns, daß der Laser im Ursprung des Fermi-Normal-Koordinatensystems ruht und daß dort gemäß Ref. 60 die Metrik, die der ebenen Raum Zeit ist, d.h.

$$g_{\mu\nu}(\vec{r} = 0) = \eta_{\mu\nu}.$$

Daher kann die Lichtwelle am Ursprung, d.h. für $z = 0$, nicht von der Gravitationswelle beeinflusst werden. Somit lautet die Randbedingung

$$S''(t, z=0) = 0 \quad . \quad (D.9)$$

Durch Einsetzen in Gl. (D.8) kann man sich leicht überzeugen, daß der folgende Ausdruck

$$S''(t, z) = -\frac{1}{4} h \kappa K^2 c^3 \int_0^{z/c} d\tau \tau^2 \sin[(\Omega t - Kz) + \Omega\tau]$$

eine Lösung der obigen Wellengleichung ist, die auch die Randbedingung (D.9) befriedigt.

Anhang E

Integration über die Anfangsbedingungen

In diesem Anhang wollen wir das Integral

$$I(t, z, v) = \int_{-\infty}^{\infty} dz_0 \int_{-\infty}^{\infty} dv_{th} f(t; z_0, v_{th}) \delta(z - \bar{z}(t; z_0, v_{th})) \delta(v - \bar{v}(t; z_0, v_{th}))$$

berechnen, wobei die Größen $\bar{z}$ und $\bar{v}$ von z_0 und v_{th} abhängen und durch

$$\bar{z} \equiv v_{th} \cdot t + z_0 (1 - \frac{1}{2} h \sin \Omega t) - \frac{1}{2} h v_{th} \cdot t \sin \Omega t - h \frac{v_{th}}{\Omega} (\cos \Omega t - 1) \quad (E.1)$$

$$\bar{v} \equiv v_{th} - \frac{1}{2} h \Omega z_0 \cos \Omega t - \frac{1}{2} h \Omega v_{th} \cdot t \cos \Omega t + \frac{1}{2} h v_{th} \sin \Omega t \quad (E.2)$$

gegeben sind.

Dazu führen wir zunächst die neuen Integrationsvariablen z und v ein, die über die Beziehungen

$$\begin{aligned} z &\equiv z - \bar{z}(t, z_0, v_{th}) \\ v &\equiv v - \bar{v}(t, z_0, v_{th}) \end{aligned}$$

mit z_0 und v_{th} in Verbindung stehen. Durch Einsetzen von Gl. (E.1) und (E.2) in diese Relationen und Auflösen nach z_0 und v_{th} finden wir

$$\begin{aligned} z_0(t; z, v) &= (z - z) (1 + \frac{1}{2} h \sin \Omega t - \frac{1}{2} h \Omega t \cos \Omega t) - \\ &\quad - (v - v) t (1 - \frac{1}{2} h \sin \Omega t) + h \frac{v - v}{\Omega} (\cos \Omega t - 1) \end{aligned} \quad (E.3)$$

$$\begin{aligned} v_{th}(t; z, v) &= (v - v) - \frac{1}{2} h (v - v) \sin \Omega t \\ &\quad + \frac{1}{2} h \Omega (z - z) \cos \Omega t, \end{aligned} \quad (E.4)$$

wobei wir nur Beiträge berücksichtigt haben, die linear in h sind. Mit Hilfe dieser Gleichungen ist es leicht zu zeigen, daß die Jakobi-Determinante

$$J \equiv \frac{\partial z_0}{\partial z} \frac{\partial v_{th}}{\partial w} - \frac{\partial v_{th}}{\partial z} \frac{\partial z_0}{\partial w}$$

durch

$$J = 1 + O(h^2)$$

gegeben ist. Somit folgt insgesamt

$$\begin{aligned} I(t; z, v) &= \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dw f(t; z_0 = z_0(t, z, w), v_{th} = v_{th}(t, z, w)) \delta(z) \delta(w) = \\ &= f(t, \tilde{z}(t), \tilde{v}(t)) \end{aligned}$$

wobei die Größen $\tilde{z}$ und $\tilde{v}$ gemäß Gl. (E.3) und (E.4) durch

$$\begin{aligned} \tilde{z}(t) &\equiv z_0(t; z=0, w=0) = \\ &= z \left(1 + \frac{1}{2} h \sin \Omega t - \frac{1}{2} h \Omega t \cos \Omega t \right) - v t \left(1 - \frac{1}{2} h \sin \Omega t \right) + \\ &+ \frac{h v}{\Omega} (\cos \Omega t - 1) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{v}(t) &\equiv v_{th}(t; z=0, w=0) = \\ &= v \left(1 - \frac{1}{2} h \sin \Omega t \right) + \frac{1}{2} h \Omega z \cos \Omega t \end{aligned}$$

definiert sind.

Anhang F

Berechnung der Polarisation erster Ordnung

In diesem Anhang wollen wir die Größe

$$\rho_{ab}^{(1)}(t, z) = \int_{-\infty}^{\infty} dv \rho_{ab}^{(1)}(t, z, v)$$

für die im Abschnitt 5.6.1 diskutierten Beispiele der Verteilungen n und W berechnen.

Nach Gl. (5.59) müssen wir somit das Integral

$$\rho_{ab}^{(1)}(t, z) = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dv n(\tilde{z}(t, z, v)) W(\tilde{v}(t, z, v)) \int_0^t dt' e^{-(\gamma + i\omega)\tau'} \mathcal{V}_{ab}'(t - \tau', \tilde{z}'(\tau', z, v)) \quad (F.1)$$

auswerten, wobei wir die neue Integrationsvariable $\tau' \equiv t - t'$ eingeführt haben. Wir halten außerdem fest, daß die folgendermaßen definierten Größen $\tilde{z}'$, $\tilde{z}$ und $\tilde{v}$

$$\begin{aligned} \tilde{z}' &= z - v\tau' + \frac{1}{2}h \left\{ 2(\sin \Omega t - \sin(\Omega t - \Omega \tau')) + 2\frac{v}{\Omega} (\cos \Omega t - \cos(\Omega t - \Omega \tau')) \right. \\ &\quad \left. - 2(\Omega \tau') \cos \Omega t + v\tau' (\sin \Omega t + \sin(\Omega t - \Omega \tau')) \right\} \equiv \\ &\equiv z - v\tau' + \frac{1}{2}h \{ \dots \} \end{aligned} \quad (F.2)$$

$$\begin{aligned} \tilde{z}(t, z, v) &= z \left(1 + \frac{1}{2}h \sin \Omega t - \frac{1}{2}h \Omega t \cos \Omega t \right) - vt \left(1 - \frac{1}{2}h \sin \Omega t \right) \\ &\quad + h \frac{v}{\Omega} (\cos \Omega t - 1) \end{aligned}$$

$$\tilde{v}(t, z, v) = v \left(1 - \frac{1}{2}h \sin \Omega t \right) + \frac{1}{2}h \Omega z \cos \Omega t \quad (F.3)$$

von der Geschwindigkeit v abhängen.

Wir beginnen mit dem Fall von N Atomen, die sich zur Zeit $t = 0$ bei $z_0 = l$ befinden, d.h.

$$n(z_0) = N \delta(z_0 - l)$$

und von denen wir annehmen, daß sie keine thermische Geschwindigkeit besitzen, d.h.

$$W(v_{th}) = \delta(v_{th}).$$

Im Abschnitt 5.6.1 haben wir gezeigt, daß in diesem Fall die Größe $n(\tilde{z})W(\tilde{v})$ durch

$$n(\tilde{z}) W(\tilde{v}) = N \delta(z - l(1 - \frac{1}{2}h \sin \Omega t)) \delta(v + \frac{1}{2}h \Omega l \cos \Omega t)$$

gegeben ist. Mittels der Deltafunktion in v kann die Integration über die Geschwindigkeit sofort ausgeführt werden, und wir finden

$$\begin{aligned} \rho_{ab}^{(1)}(t, z) &= -\frac{i}{\hbar} N \delta(z - l(1 - \frac{1}{2}h \sin \Omega t)) \cdot \\ &\cdot \int_0^t d\tau' e^{-(\gamma + i\omega)\tau'} \mathcal{V}_{ab}(t - \tau'; z + \frac{1}{2}h z (\sin \Omega t - \sin(\Omega t - \Omega \tau'))) \end{aligned}$$

wobei wir bei der Berechnung von $\tilde{z}'$ Terme der Ordnung h^2 vernachlässigt haben. Die wohlbekannte Eigenschaft der Deltafunktion

$$f(x) \delta(x-a) = f(a) \delta(x-a)$$

bringt dieses Ergebnis auf die Form

$$\rho_{ab}^{(1)}(t, z) = -\frac{i}{\hbar} N \delta(z - l(1 - \frac{1}{2}h \sin \Omega t)) \int_0^t d\tau' e^{-(\gamma + i\omega)\tau'} \mathcal{V}_{ab}(t - \tau'; l - \frac{1}{2}h l \sin(\Omega t - \Omega \tau')).$$

(F.4)

Sodann entwickeln wir den in Gl. (F.4) auftretenden Wechselwirkungsoperator in Potenzen von h , wobei wir maximal Terme linear in h berücksichtigen.

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{ab}(t - \tau'; l - \frac{1}{2}h l \sin(\Omega t - \Omega \tau')) &= -\frac{e}{2} \mathcal{E}_0 e^{-i(\omega_0 t + \phi_0 - k_0 l)} e^{i\omega_0 \tau'} \\ &\cdot \left[1 - \frac{i}{2} h k_0 l \sin(\Omega t - \Omega \tau') \right]. \end{aligned}$$

Einsetzen dieser Beziehung in Gl. (F.4) und Benutzung der Relation

$$\sin \Omega t = \frac{1}{2i} \sum_{s=\pm 1} s e^{is\Omega t}$$

führt auf

$$\begin{aligned} \rho_{ab}^{(1)}(t, z) = & i N \mu_0 \delta(z - l(1 - \frac{1}{2} h \sin \Omega t)) \left\{ e^{-i(\nu_0 t + \phi_0 - k_0 l)} \int_0^t d\tau' e^{-(\gamma + i\Delta)\tau'} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} h k_0 l \sum_{s=\pm 1} s e^{-i[(\nu_0 - s\Omega)t + \phi_0 - k_0 l]} \int_0^t d\tau' e^{-[\gamma + i(\Delta + s\Omega)]\tau'} \right\} \end{aligned}$$

wobei $\mu_0 \equiv \frac{\hbar^2 \epsilon_0}{2 \hbar}$ die Rabi-Frequenz des Pumpfeldes und $\Delta \equiv \omega - \nu_0$ die Verstimmung des Lasers gegenüber dem Atom bezeichnen. Für Beobachtungszeiten $t \gg 1/\gamma$ können wir die obere Grenze der Integrale durch unendlich ersetzen, ohne dabei den Wert dieser Ausdrücke wesentlich zu ändern. Ausführen der Integration liefert sodann

$$\begin{aligned} \rho_{ab}^{(1)}(t, z) = & i N \mu_0 \delta(z - l(1 - \frac{1}{2} h \sin \Omega t)) \left\{ e^{-i(\nu_0 t + \phi_0 - k_0 l)} \frac{1}{\gamma + i\Delta} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} h k_0 l \sum_{s=\pm 1} s e^{-i[(\nu_0 - s\Omega)t + \phi_0 - k_0 l]} \frac{1}{\gamma + i(\Delta + s\Omega)} \right\} \end{aligned}$$

Im Fall der Resonanz des Lasers mit dem atomaren Übergang, d.h. $\Delta = 0$, folgt hieraus

$$\begin{aligned} \rho_{ab}^{(1)}(t, z) = & i N \delta(z - l(1 - \frac{1}{2} h \sin \Omega t)) \left\{ e^{-i(\nu_0 t + \phi_0 - k_0 l)} \mu_0 \frac{1}{\gamma} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} h k_0 l \sum_{s=\pm 1} s e^{-i[(\nu_0 - s\Omega)t + \phi_0 - k_0 l]} \mu_0 \frac{(-1)}{\gamma + is\Omega} \right\} \end{aligned}$$

Wir wenden uns jetzt der Diskussion einer homogenen Verteilung zu, d.h.

$$n(z_0) \equiv n_0 \text{ .}$$

Die Geschwindigkeitsverteilung W werden wir erst am Ende der Rechnung festlegen und dann die Beispiele einer Deltafunktion und einer Boltzmannverteilung diskutieren.

Analog zu der obigen Rechnung entwickeln wir den Wechselwirkungsoperator nach $\hbar$,

$$V_{ab}(t-z'; \vec{z}') = -\frac{q}{2} \varepsilon_0 e^{-i(\nu_0 t + \phi_0 - k_0 z)} e^{i(\nu_0 - k_0 \nu) \tau'} \left[1 + \frac{i}{2} \hbar k_0 \{ \dots \} \right], \quad (F.6)$$

wobei die geschweifte Klammer durch Gl. (F.2) definiert ist. Dasselbe führen wir auch für die Geschwindigkeitsverteilung $W(\nu)$ durch, wobei wir Gl. (F.3) benutzen

$$W(\tilde{\nu}) = W(\nu) - \frac{1}{2} \hbar (\nu \sin \Omega t - \Omega z \cos \Omega t) \frac{dW}{d\nu}. \quad (F.7)$$

Durch Einsetzen der Gl'n. (F.6) und (F.7) in (F.1) finden wir

$$\begin{aligned} p_{ab}^{(n)}(t, z) = i n_0 \mu_0 e^{-i(\nu_0 t + \phi_0 - k_0 z)} & \int_{-\infty}^{\infty} d\nu W(\nu) \left\{ \int_0^t d\tau' e^{-[\gamma + i(\Delta + k_0 \nu)] \tau'} + \right. \\ & + \frac{i}{2} \hbar k_0 \left[\int_0^t d\tau' e^{-[\gamma + i(\Delta + k_0 \nu)] \tau'} (W(\nu) \{ \dots \} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{i}{k_0} \frac{dW}{d\nu} (\nu \sin \Omega t - \Omega z \cos \Omega t) \right) \right] \Big\}. \quad (F.8) \end{aligned}$$

Partielle Integration der Beiträge proportional zu $dW/d\nu$ liefert

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \frac{dW}{d\nu} e^{-[\gamma + i(\Delta + k_0 \nu)] \tau'} (\nu \sin \Omega t - \Omega z \cos \Omega t) = \\ & = - \int_{-\infty}^{\infty} d\nu W(\nu) e^{-[\gamma + i(\Delta + k_0 \nu)] \tau'} [-i k_0 (\nu \tau' \sin \Omega t - z \Omega \tau' \cos \Omega t) + \sin \Omega t], \end{aligned}$$

wobei wir noch die Tatsache benutzt haben, daß W normierbar ist und somit im Unendlichen verschwinden muß.

Bei Berücksichtigung dieser Beziehung vereinfacht sich Gl. (F.4) zu

$$\begin{aligned} p_{ab}^{(n)}(t, z) = i n_0 \mu_0 e^{-i(\nu_0 t + \phi_0 - k_0 z)} & \int_{-\infty}^{\infty} d\nu W(\nu) \left\{ \int_0^t d\tau' e^{-[\gamma + i(\Delta + k_0 \nu)] \tau'} \left[\right. \right. \\ & \left. \left. \left[1 + \frac{i}{2} \hbar k_0 (z (\sin \Omega t - \sin(\Omega t - \Omega \tau')) + 2 \frac{\nu}{\Omega} (\cos \Omega t - \cos(\Omega t - \Omega \tau')) + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \nu \tau' \sin(\Omega t - \Omega \tau') - \frac{i}{k_0} \sin \Omega t \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

woraus wir im Grenzfall $t \rightarrow \infty$ als Ergebnis

$$\begin{aligned}
 p_{ab}^{(1)}(t, z) = & i n_0 (1 + \frac{1}{2} h \sin \Omega t) \mu_0 e^{-i(\nu_0 t + \phi_0 - k_0 z)} \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{W(v)}{\gamma + i(\Delta + k_0 v)} \\
 & + i n_0 \mu_0 (\frac{1}{4} h k_0) \sum_{s=\pm 1} e^{-i[(\nu_0 - s\Omega)t + \phi_0 - k_0 z]} \int_{-\infty}^{\infty} dv W(v) \left\{ (s\Omega + 2i\frac{\nu}{\Omega}) \cdot \right. \\
 & \cdot \left(\frac{1}{\gamma + i(\Delta + k_0 v)} - \frac{1}{\gamma + i(\Delta + s\Omega + k_0 v)} \right) + \frac{s\nu}{[\gamma + i(\Delta + s\Omega + k_0 v)]^2} \Big\}
 \end{aligned} \quad (F.9)$$

erhalten. Dabei haben wir Gl. (F.5) und die Beziehungen

$$\cos \Omega t = \frac{1}{2} \sum_{s=\pm 1} e^{is\Omega t}$$

und

$$\int_0^{\infty} d\tau' \tau' e^{-\alpha \tau'} = \frac{1}{\alpha^2} \quad \text{für } \operatorname{Re} \alpha > 0$$

benutzt.

Wir werden jetzt die Geschwindigkeitsverteilung W festlegen und beginnen mit dem Beispiel

$$W(v_{th}) = \delta(v_{th}).$$

In diesem Fall kann in Gl. (F.9) die Integration über die Geschwindigkeit v sofort ausgeführt werden, und wir finden als Ergebnis

$$\begin{aligned}
 p_{ab}^{(1)}(t, z) = & i n_0 (1 + \frac{1}{2} h \sin \Omega t) \left\{ e^{-i(\nu_0 t + \phi_0 - k_0 z)} \frac{\mu_0}{\gamma + i\Delta} + \right. \\
 & \left. + (\frac{1}{4} h k_0) \sum_{s=\pm 1} s e^{-i[(\nu_0 - s\Omega)t + \phi_0 - k_0 z]} \left(\frac{1}{\gamma + i\Delta} - \frac{1}{\gamma + i(\Delta + s\Omega)} \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Im Resonanzfall $\Delta = 0$ geht diese Gleichung in

$$\begin{aligned}
 p_{ab}^{(1)}(t, z) = & i n_0 (1 + \frac{1}{2} h \sin \Omega t) \left\{ e^{-i(\nu_0 t + \phi_0 - k_0 z)} \frac{\mu_0}{\gamma} + \right. \\
 & \left. + (\frac{1}{4} h k_0) \sum_{s=\pm 1} s e^{-i[(\nu_0 - s\Omega)t + \phi_0 - k_0 z]} \mu_0 \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma + is\Omega} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

über.

Bei einer Boltzmann-Verteilung

$$W(v_{th}) = \frac{1}{\sqrt{\pi} u} e^{-\left(\frac{v_{th}}{u}\right)^2} \quad (5.1)$$

führt die Integration über die Geschwindigkeit auf die bekannte Plasma-Dispersionsfunktion^{38, 111} und ihre Ableitungen. Dazu gehen wir zunächst von der folgenden Relation

$$\int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{W(v) \cdot v}{\left[\gamma + i\left(\frac{\omega}{\Omega} + k_0 v\right)\right]^n} = -\frac{i}{2} n u^2 k_0 \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{W(v)}{\left[\gamma + i\left(\frac{\omega}{\Omega} + k_0 v\right)\right]^{n+1}}$$

für $n \geq 1$ aus, die sich mittels Gl. (5.1) leicht durch partielle Integration ableiten läßt. Diese Beziehung bringt Gl. (F.9) auf die Form

$$\begin{aligned} g_{ab}^{(n)}(t, z) = i n_0 (1 + \frac{1}{2} h \sin \Omega t) \Big\{ & e^{-i(\nu_0 t + \phi_0 - k_0 z)} \mu_0 \mathcal{Z}_1(\Delta) + \\ & + \frac{1}{4} h k_0 \mu_0 \sum_{s=\pm 1} s e^{-i[(\nu_0 - s\Omega)t + \phi_0 - k_0 z]} [s \mathcal{Z}_1(\Delta) - \mathcal{Z}_1(\Delta + s\Omega)] \\ & + \frac{u^2 k_0}{\Omega} (\mathcal{Z}_2(\Delta) - \mathcal{Z}_2(\Delta + s\Omega) - i s u^2 k_0 \mathcal{Z}_3(\Delta + s\Omega)) \Big\} \end{aligned} \quad (F.10)$$

wobei wir die Funktionen

$$\mathcal{Z}_n\left(\frac{\omega}{\Omega}\right) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{W(v)}{\left[\gamma + i\left(\frac{\omega}{\Omega} + k_0 v\right)\right]^n} \quad \text{für } n \geq 1 \quad (F.11)$$

definiert haben. Die Funktion $\mathcal{Z}_1$ ist bis auf einen Faktor $i k_0 u$ die Plasma-Dispersionsfunktion, die im Detail in Ref. 78 behandelt ist.

Für $n > 1$ können die Funktionen $\mathcal{Z}_n$ rekursiv aus der Beziehung

$$\mathcal{Z}_{n+1} = -\frac{1}{n} \frac{\partial \mathcal{Z}_n\left(\frac{\omega}{\Omega}\right)}{\partial \left(i\frac{\omega}{\Omega}\right)} \quad (F.12)$$

berechnet werden, die sofort aus der Gl. (F.11) folgt.

Im Grenzfall starker Doppler-Verbreiterung, d.h. $\gamma/k_0 u \ll 1$ kann die Plasma-Dispersionsfunktion $\mathcal{Z}_1$ auf die Form⁷⁸

$$\mathcal{Z}_1\left(\frac{\omega}{\Omega}\right) = \frac{1}{i k_0 u} e^{-\eta^2} \left[i \sqrt{\pi} + 2 \int_0^{\eta} dx e^{-x^2} \right], \quad (F.13)$$

gebracht werden, wobei wir die Abkürzung

$$\eta \equiv \frac{f}{k_0 u}$$

eingeführt haben. Gemäß Gl. (F.12) finden wir hieraus durch Differentiation nach $(i\xi)$ die Funktionen $\mathfrak{Z}_2$ und $\mathfrak{Z}_3$

$$\mathfrak{Z}_2(\xi) = \frac{2}{(k_0 u)^2} e^{-\eta^2} \left\{ e^{+\eta^2} - 2\eta \int_0^\eta dx e^{x^2} - i\sqrt{\pi} \eta \right\} \quad (\text{F.14})$$

$$\mathfrak{Z}_3(\xi) = -i \frac{1}{(k_0 u)^3} e^{-\eta^2} \left\{ \left(2 \int_0^\eta dx e^{x^2} + i\sqrt{\pi} \right) (1 - 2\eta^2) + 2\eta e^{\eta^2} \right\} \quad (\text{F.15})$$

Im allgemeinen ist die asymptotische Entwicklung der Ableitung einer Funktion $f = f(x)$ nicht gleich der Ableitung der asymptotischen Entwicklung der Funktion f , wie man an dem Beispiel $f(x) \equiv x + \sin x$ sofort erkennt. In unserem Fall dagegen treten zwei Variable auf, nämlich γ und ξ , wobei die asymptotische Entwicklung in γ geschieht, während die Differentiation nach dem Parameter ξ vorgenommen wird. Man kann leicht zeigen⁺⁾ , daß in diesem Fall die beiden Methoden identische Ergebnisse liefern. Somit sind die Funktionen $\mathfrak{Z}_2$ und $\mathfrak{Z}_3$ im Grenzfall starker Doppler-Verbreiterung tatsächlich durch die Gl. (F.14) und (F.15) gegeben.

⁺⁾ Dazu entwickeln wir die Funktion $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\xi, \gamma)$ gemäß

$$\mathcal{F}(\xi, \gamma) = \sum_{n,m} \mathcal{F}_{nm} \xi^n \gamma^m$$

und finden im Grenzfall $\gamma \rightarrow 0$

$$\mathcal{F}(\xi, \gamma \rightarrow 0) = \sum_n \mathcal{F}_{n0} \xi^n$$

woraus durch Differentiation nach ξ sofort

$$\frac{\partial \mathcal{F}(\xi, \gamma \rightarrow 0)}{\partial \xi} = \sum_n n \mathcal{F}_{n0} \xi^{n-1}$$

folgt. Andererseits liefern die Ausführung der Differentiation nach ξ

$$\frac{\partial \mathcal{F}(\xi, \gamma)}{\partial \xi} = \sum_{m,n} n \mathcal{F}_{nm} \xi^{n-1} \gamma^m$$

und der anschließende Grenzprozeß $\gamma \rightarrow 0$ dasselbe Resultat.

Wir wollen jetzt noch den Resonanzfall $\Delta = 0$ behandeln. Aus den Gln. (F.10), (F.13), (F.14) und (F.15) erkennen wir, daß dann der Parameter $s\Omega/k_0 u$ auftritt. Daher ist es nützlich, hierfür eine Abschätzung anzugeben. Für $k_0 \approx 10^6$ 1/m, $u = 10^3$ m/sec und $\Omega = 10^3$ Hz finden wir

$$\left| \frac{s\Omega}{k_0 u} \right| \sim 10^{-6}$$

Eine Entwicklung der Funktionen $\mathcal{F}_j(s\Omega)$ ($j = 1, 2, 3$) nach Potenzen von $s\Omega/k_0 u$ ist daher günstig und nach etwas Rechnung erhalten wir als Resultat

$$\begin{aligned} \rho_{ab}^{(u)}(t, z) = & i n_0 \left(1 + \frac{1}{2} h \sin \Omega t \right) \left(\frac{\gamma}{k_0 u} \right) \left\{ e^{-i(\nu_0 t + \phi_0 - k_0 z)} \sqrt{\pi} \frac{\mu_0}{\gamma} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{4} h k_0 z \right) \sum_{s=\pm 1} s e^{-i[(\nu_0 - s\Omega)t + \phi_0 - k_0 z]} \frac{\mu_0}{\gamma} \frac{2is\Omega}{k_0 u} \left(1 + s \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{u \cdot \frac{1}{\Omega}}{z} \right) \right\} \end{aligned}$$

Anhang G

Berechnung der Polarisation dritter Ordnung

In diesem Anhang wollen wir die Größe

$$\rho_{ab}^{(3)}(t, z) = \int_{-\infty}^{\infty} dv \rho_{ab}^{(3)}(t, z, v)$$

für die schon wiederholt benutzten Beispiele von n und W berechnen.

Ausgehend von Gl. (5.60) haben wir somit das Integral

$$\begin{aligned} \rho_{ab}^{(3)}(t, z) = & \frac{2i}{h^3} \int_{-\infty}^{\infty} dv m(\tilde{z}(t, z, v)) W(\tilde{v}(t, z, v)) \int_0^t d\tau''' \int_0^{t-\tau'''} d\tau'' \int_0^{t-\tau''-\tau'''} d\tau' e^{-(\gamma+i\omega)\tau'''} e^{-\gamma\tau''} \\ & \mathcal{V}_{ab}(t-\tau'''; \bar{z}''') [\mathcal{V}_{ab}(t-\tau''-\tau'''; \bar{z}'') \mathcal{V}_{ab}^*(t-\tau'-\tau''-\tau'''; \bar{z}') \cdot \\ & \cdot e^{-(\gamma-i\omega)\tau'} + c.c.] \end{aligned} \quad (G.1)$$

auszuwerten, wobei wir die Integrationsvariablen

$$\begin{aligned} \tau' & \equiv t'' - t' \\ \tau'' & \equiv t''' - t'' \\ \tau''' & \equiv t - t''' \end{aligned}$$

eingeführt haben und die Größen $\bar{z}'$, $\bar{z}''$ und $\bar{z}'''$ durch die folgenden Gleichungen definiert sind

$$\begin{aligned} \bar{z}' & = z - v(\tau' + \tau'' + \tau''') + \frac{1}{2} h \left\{ z(\sin \Omega t - \sin(\Omega t - \Omega \tau' - \Omega \tau'' - \Omega \tau''')) \right. \\ & + 2 \frac{v}{\Omega} (\cos \Omega t - \cos(\Omega t - \Omega \tau' - \Omega \tau'' - \Omega \tau''')) - z \Omega (\tau' + \tau'' + \tau''') \cos \Omega t \\ & \left. + v(\tau' + \tau'' + \tau''') (\sin \Omega t + \sin(\Omega t - \Omega \tau' - \Omega \tau'' - \Omega \tau''')) \right\} \end{aligned} \quad (G.2a)$$

$$\begin{aligned} \bar{z}'' &= z - v(\tau'' + \tau''') + \frac{1}{2} h \left\{ z (\sin \Omega t - \sin(\Omega t - \Omega \tau'' - \Omega \tau''')) + \right. \\ &\quad + 2 \frac{v}{\Omega} (\cos \Omega t - \cos(\Omega t - \Omega \tau'' - \Omega \tau''')) - \Omega (\tau'' + \tau''') z \cos \Omega t \\ &\quad \left. + v(\tau'' + \tau''') (\sin \Omega t + \sin(\Omega t - \Omega \tau'' - \Omega \tau''')) \right\} \end{aligned} \quad (G.2b)$$

$$\begin{aligned} \bar{z}' &= z - v \tau''' + \frac{1}{2} h \left\{ z (\sin \Omega t - \sin(\Omega t - \Omega \tau''')) + 2 \frac{v}{\Omega} (\cos \Omega t - \right. \\ &\quad \left. - \cos(\Omega t - \Omega \tau''')) - z \Omega \tau''' \cos \Omega t + v \tau''' (\sin \Omega t + \sin(\Omega t - \Omega \tau''')) \right\}. \end{aligned} \quad (G.2c)$$

Die Ausdrücke für $\tilde{z}$ und $\tilde{v}$ sind wie in Anhang F. Wir betrachten zunächst Atome, die keinerlei thermische Geschwindigkeit besitzen, d.h.

$$W(v_{th}) = \delta(v_{th}).$$

Die räumliche Verteilungsfunktion n werden wir später festlegen und für die Beispiele (5.4) und (5.5) diskutieren. Wie im Abschnitt 5.6.1 gezeigt worden ist, läßt sich in diesen beiden Fällen die Größe $n(\tilde{z}) W(\tilde{v})$ durch

$$n(\tilde{z}) W(\tilde{v}) = n(t, z) \delta(v + \frac{1}{2} h \Omega z \cos \Omega t) \quad (G.3)$$

darstellen, wobei die (effektive) Teilchendichte n durch Gl. (5.54) bzw. (5.55) gegeben ist. Unter Benutzung der Deltafunktion in Gl. (G.3) können wir die Integration über die Geschwindigkeit ausführen, wodurch sich die Gln. (G.2a), (G.2b) und (G.2c) zu

$$\bar{z}' = z + \frac{1}{2} h z \left\{ \sin \Omega t - \sin(\Omega t - \Omega \tau' - \Omega \tau'' - \Omega \tau''') \right\} \quad (G.4a)$$

$$\bar{z}'' = z + \frac{1}{2} h z \left\{ \sin \Omega t - \sin(\Omega t - \Omega \tau'' - \Omega \tau''') \right\} \quad (G.4b)$$

$$\bar{z}' = z + \frac{1}{2} h z \left\{ \sin \Omega t - \sin(\Omega t - \Omega \tau''') \right\} \quad (G.4c)$$

vereinfachen. Dabei haben wir Beiträge der Ordnung h^2 vernachlässigt und die Tatsache

$$(v + \frac{1}{2} h \Omega z \cos \Omega t) \delta(v + \frac{1}{2} h \Omega z \cos \Omega t) = 0$$

benutzt. Die Polarisation dritter Ordnung lautet somit

$$\begin{aligned} \rho_{ab}^{(3)}(t, z) &= \frac{2i}{\hbar^3} \mathcal{M}(t, z) \int_0^t d\tau''' \int_0^{t-\tau'''} d\tau'' \int_0^{t-\tau''-\tau'''} d\tau' e^{-(\gamma+i\omega)\tau'''} e^{-\gamma_a \tau''} \\ &\cdot \mathcal{V}_{ab}(t-\tau'''; z + \frac{1}{2} h z (\sin \Omega t - \sin(\Omega t - \Omega \tau'''))) [\mathcal{V}_{ab}(t-\tau''-\tau'''; z + \frac{1}{2} h z (\sin \Omega t - \sin(\Omega t - \Omega \tau'' - \Omega \tau'''))) \\ &\cdot \mathcal{V}_{ab}^*(t-\tau'-\tau''-\tau'''; z + \frac{1}{2} h z (\sin \Omega t - \sin(\Omega t - \Omega \tau' - \Omega \tau'' - \Omega \tau'''))) e^{-(\gamma-i\omega)\tau'} + c.c.] . \end{aligned}$$

Entwicklung des Wechselwirkungsoperators $\mathcal{V}_{ab}$ nach Potenzen von h liefert nach kurzer Rechnung

$$\begin{aligned} \rho_{ab}^{(3)}(t, z) &= -2i \mathcal{M}(t, z) \mu_0^3 \left\{ e^{-i(\nu_0 t + \phi_0 - k_0 z)} \int_0^t d\tau''' \int_0^{t-\tau'''} d\tau'' \int_0^{t-\tau''-\tau'''} d\tau' \cdot \right. \\ &\quad \left(e^{-\frac{1}{2}(\gamma+i\Delta)\tau'} + e^{-\frac{1}{2}(\gamma-i\Delta)\tau'} \right) e^{-\gamma_a \tau''} e^{-\frac{1}{2}(\gamma+i\Delta)\tau'''} + \\ &\quad + \frac{1}{4} h k_0 z \sum_{s=\pm 1} s e^{-i[(\nu_0 - s\Omega)t + \phi_0 - k_0 z]} \int_0^t d\tau''' \int_0^{t-\tau'''} d\tau'' \int_0^{t-\tau''-\tau'''} d\tau' \cdot \\ &\quad \left[\left(e^{-\frac{1}{2}(\gamma+i\Delta)\tau'} + e^{-\frac{1}{2}(\gamma-i\Delta)\tau'} \right) e^{-\gamma_a \tau''} \left(e^{-\frac{1}{2}(\gamma+i\Delta)\tau'''} - e^{-\frac{1}{2}(\gamma+i(\Delta+s\Omega))\tau'''} \right) \right. \\ &\quad + \left. \left(e^{-\frac{1}{2}(\gamma+i\Delta)\tau'} - e^{-\frac{1}{2}(\gamma-i\Delta)\tau'} \right) e^{-\gamma_a \tau''} e^{-\frac{1}{2}(\gamma+i(\Delta+s\Omega))\tau'''} \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(e^{-\frac{1}{2}[\gamma+i(\Delta+s\Omega)]\tau'} - e^{-\frac{1}{2}[\gamma-i(\Delta-s\Omega)]\tau'} \right) e^{-\frac{1}{2}(\gamma_a + is\Omega)\tau''} e^{-\frac{1}{2}(\gamma+i(\Delta+s\Omega))\tau'''} \right] \right\} \end{aligned}$$

wobei wir die Rabi-Frequenz des Pumpfeldes $\mu_0 = \frac{\hbar \omega_0}{2\hbar}$ und die Verstimmung $\Delta \equiv \omega - \nu_0$ eingeführt haben.

Für Beobachtungszeiten $t \gg 1/\gamma$ und $t \gg 1/\gamma_a$ können wir die oberen Integrationsgrenzen durch unendlich ersetzen, und finden so

$$\begin{aligned} \rho_{ab}^{(3)}(t, z) = & -2i u(t, z) \mu_0^3 \left\{ e^{-i(\nu_0 t + \phi_0 - k_0 z)} \frac{1}{\gamma_a} \frac{1}{\gamma + i\Delta} \frac{2\gamma}{\gamma^2 + \Delta^2} \right. \\ & + \left(\frac{1}{4} h k_0 z \right) \sum_{s=\pm 1} s e^{-i[(\nu_0 - s\Omega)t + \phi_0 - k_0 z]} \left[\frac{2\gamma}{\gamma^2 + \Delta^2} \frac{1}{\gamma_a} \left(\frac{1}{\gamma + i\Delta} - \frac{1}{\gamma + i(\Delta + s\Omega)} \right) \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{\gamma_a + is\Omega} \frac{1}{\gamma + i(\Delta + s\Omega)} \frac{2i\Delta}{\gamma^2 + \Delta^2} - \frac{1}{\gamma_a + is\Omega} \frac{1}{\gamma + i(\Delta + s\Omega)} \left(\frac{1}{\gamma + i(\Delta + s\Omega)} - \frac{1}{\gamma - i(\Delta - s\Omega)} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

Im Resonanzfall, d.h. $\Delta = 0$, vereinfacht sich dieses Ergebnis zu

$$\begin{aligned} \rho_{ab}^{(3)}(t, z) = & -2i u(t, z) \left\{ e^{-i(\nu_0 t + \phi_0 - k_0 z)} \frac{2}{\gamma_a} \mu_0^3 \frac{1}{\gamma} \frac{1}{\gamma} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{4} h k_0 z \right) \sum_{s=\pm 1} s e^{-i[(\nu_0 - s\Omega)t + \phi_0 - k_0 z]} \frac{2}{\gamma_a} \mu_0^3 \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma + is\Omega} \right) \right\} \end{aligned}$$

Wir wollen jetzt die räumliche Verteilung der Atome festlegen und beginnen mit dem Fall von N Atomen, d.h. mit Gl. (5.54). Damit geht die obige Gleichung in

$$\begin{aligned} \rho_{ab}^{(3)}(t, z) = & -LN \delta(z - L(1 - \frac{1}{2} h \sin \Omega t)) \left\{ e^{-i(\nu_0 t + \phi_0 - k_0 L)} I \frac{\mu_0}{\gamma} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{4} h k_0 L \right) \sum_{s=\pm 1} s e^{-i[(\nu_0 - s\Omega)t + \phi_0 - k_0 L]} I \mu_0 \frac{(-1)}{\gamma + is\Omega} \right\} \end{aligned}$$

über, wobei wir - wie in Anhang F - den Sättigungsparameter

$$I = \frac{\mathcal{E}_0^2 \mathcal{E}_o^2}{\hbar^2 \gamma \gamma_a}$$

eingeführt haben.

Die entsprechende Gleichung für den Resonatorfall Gl. (5.56)

lautet sodann

$$\begin{aligned} \rho_{ab}^{(3)}(t, z) = & -i m_0 (1 + \frac{1}{2} h \sin \Omega t) \left\{ e^{-i(\nu_0 t + \phi_0 - k_0 z)} I \frac{\mu_0}{\gamma} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{4} h k_0 z \right) \sum_{s=\pm 1} s e^{-i[(\nu_0 - s\Omega)t + \phi_0 - k_0 z]} I \mu_0 \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma + i s \Omega} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Wir wollen jetzt die Brownsche Bewegung der Atome im Resonator berücksichtigen und nehmen deshalb für die Geschwindigkeitsverteilung der Atome eine Boltzmann-Verteilung an

$$W(v_{th}) = \frac{1}{\sqrt{\pi} u} e^{-\left(\frac{v_{th}}{u}\right)^2}$$

In diesem Problem müssen wir alle Terme in Gl. (G.2) mitnehmen, und die Bewegung reduziert sich somit nicht auf eine so einfache Form wie Gl. (6.4). Die Rechnung wird daher sehr umfangreich, ist aber ganz analog zum entsprechenden Fall im Anhang F.

Wie im obigen Beispiel entwickeln wir zunächst die Wechselwirkungsenergie in Potenzen von h . Dasselbe führen wir auch für die in Gl. (G.1) erscheinende Größe $W(\tilde{v})$ durch, d.h.

$$W(\tilde{v}) = W(v) - \frac{1}{2} h (v \sin \Omega t - \Omega z \cos \Omega t) \frac{dW}{dv}.$$

Durch partielle Integration über v können wir den letzten Beitrag in einen verwandeln, der proportional zu W ist. Dieser Trick wurde auch schon im Anhang F benutzt.

Noch etwas Rechnung finden wir sodann

$$\begin{aligned} \rho_{ab}^{(3)}(t, z) = & -2i m_0 (1 + \frac{1}{2} h \sin \Omega t) \mu_0^3 e^{-i(\nu_0 t + \phi_0 - k_0 z)} \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_0^{\infty} d\tau''' \int_0^{\infty} d\tau'' \int_0^{\infty} d\tau' \\ & W(v) e^{-\frac{1}{2} h k_0 z} \left\{ e^{-(\gamma + i\Delta)\tau'' - \gamma \tau''} \left(e^{-\frac{1}{2} h k_0 v(\tau' + \tau''')} e^{-(\gamma + i\Delta)\tau'} e^{-i k_0 v(\tau' + \tau''')} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{i}{2} h k_0 \left[\tilde{f}_- e^{-\frac{1}{2} h k_0 v(\tau' - \tau''')} + \tilde{f}_+ e^{-\frac{1}{2} h k_0 v(\tau' + \tau''')} \right] \right\} \end{aligned}$$

(G.5)

wobei wir die Zeitintegration ins Unendliche ausgedehnt und die folgendermaßen definierten Größen $\mathcal{P}_{\pm}$ eingeführt haben.

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{-} &\equiv z \left[\sin \Omega t - \sin(\Omega t - \Omega \tau''') - \sin(\Omega t - \Omega \tau'' - \Omega \tau''') + \sin(\Omega t - \Omega \tau' - \Omega \tau'' - \Omega \tau''') \right] \\ &+ v \left[\frac{2}{\Omega} \left(\cos \Omega t - \cos(\Omega t - \Omega \tau''') - \cos(\Omega t - \Omega \tau'' - \Omega \tau''') + \cos(\Omega t - \Omega \tau' - \Omega \tau'' - \Omega \tau''') \right) \right. \\ &+ \tau''' \left(\sin(\Omega t - \Omega \tau''') + \sin(\Omega t - \Omega \tau'' - \Omega \tau''') - \sin(\Omega t - \Omega \tau' - \Omega \tau'' - \Omega \tau''') \right) \\ &+ \tau'' \left(\sin(\Omega t - \Omega \tau'' - \Omega \tau''') - \sin(\Omega t - \Omega \tau' - \Omega \tau'' - \Omega \tau''') \right) \\ &\left. - \tau' \sin(\Omega t - \Omega \tau' - \Omega \tau'' - \Omega \tau''') \right] \equiv \\ &\equiv \mathcal{B}_{-} + v \mathcal{C}_{-} ;\end{aligned}$$

(G.6a)

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{+} &\equiv z \left[\sin \Omega t - \sin(\Omega t - \Omega \tau'') + \sin(\Omega t - \Omega \tau'' - \Omega \tau''') - \sin(\Omega t - \Omega \tau' - \Omega \tau'' - \Omega \tau''') \right] \\ &+ v \left[\frac{2}{\Omega} \left(\cos \Omega t - \cos(\Omega t - \Omega \tau'') + \cos(\Omega t - \Omega \tau'' - \Omega \tau''') - \cos(\Omega t - \Omega \tau' - \Omega \tau'' - \Omega \tau''') \right) \right. \\ &+ \tau''' \left(\sin(\Omega t - \Omega \tau''') - \sin(\Omega t - \Omega \tau'' - \Omega \tau''') + \sin(\Omega t - \Omega \tau' - \Omega \tau'' - \Omega \tau''') \right) \\ &- \tau'' \left(\sin(\Omega t - \Omega \tau'' - \Omega \tau''') - \sin(\Omega t - \Omega \tau' - \Omega \tau'' - \Omega \tau''') \right) \\ &\left. + \tau' \sin(\Omega t - \Omega \tau' - \Omega \tau'' - \Omega \tau''') \right] \equiv \\ &\equiv \mathcal{B}_{+} + v \mathcal{C}_{+} .\end{aligned}$$

(G.6b)

Für die weitere Rechnung ist es von Nutzen, die Größen $\tilde{f}_{\pm}$ gemäß Gl. (G.6) in $s_{\pm}$ und $c_{\pm}$ zu zerlegen.

Mit Hilfe der Beziehungen

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}u} \int_{-\infty}^{\infty} dv e^{-\left(\frac{v}{u}\right)^2} e^{ik_0 v \tau} = e^{-\frac{1}{4}(k_0 u)^2 \tau^2}$$

und

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}u} \int_{-\infty}^{\infty} dv v e^{-\left(\frac{v}{u}\right)^2} e^{ik_0 v \tau} = \frac{i}{2} u^2 k_0 \tau e^{-\frac{1}{4}(k_0 u)^2 \tau^2},$$

die sofort durch quadratische Ergänzung des Exponenten bewiesen werden können, führen wir jetzt die Integration über die Geschwindigkeit aus. Dadurch vereinfacht sich Gl. (G.5) zu

$$\begin{aligned} \rho_{ab}^{(3)}(t, z) = & -2i n_0 (1 + \frac{1}{2} h \sin \Omega t) \mu_0^3 e^{-i(\nu_0 t + \phi_0 - k_0 z)} \int_0^{\infty} d\tau''' \int_0^{\infty} d\tau'' \int_0^{\infty} d\tau' \\ & e^{-\frac{1}{4}(k_0 u)^2 (\tau' + \tau''')^2} e^{-(\gamma + i\Delta)\tau'' - \gamma \tau'''} \left\{ e^{-\frac{1}{4}(k_0 u)^2 (\tau' - \tau''')^2} + \right. \\ & + e^{-\frac{1}{4}(k_0 u)^2 (\tau' - \tau''')^2} \left. \right\} + \frac{i}{2} h k_0 \left[(z s_- + \right. \\ & + \frac{i}{2} u^2 k_0 (\tau' - \tau''') c_-) e^{-\frac{1}{4}(k_0 u)^2 (\tau' - \tau''')^2} + (z s_+ - \\ & - \frac{i}{2} u^2 k_0 (\tau' + \tau''') c_+) e^{-\frac{1}{4}(k_0 u)^2 (\tau' + \tau''')^2} \left. \right] \Bigg\}. \end{aligned} \quad (G.7)$$

Wir wollen jetzt die Integrationen über τ' , τ'' und τ''' im Grenzfall starker Doppler-Verbreiterung, d.h. für $k_0 u \gg \gamma$ und $k_0 u \gg \Delta + s\Omega$ ausführen. Dabei haben wir zu beachten, daß in Gl. (G.7) zwei Arten von Integralen auftreten.

So enthalten z.B. die Integrale herrührend von $c_{\pm}$ die Integrationsvariablen τ' , τ'' und τ''' linear und quadratisch, während z.B. die Integrale auf Grund von $s_{\pm}$ die Integrationsvariablen τ' , τ'' und τ''' nur als Argumente von Exponentialfunktionen haben. Letztere lassen sich

mittels einer Methode behandeln, die auf Lamb³⁸ zurückgeht. Diese wollen wir hier kurz erläutern, da es wichtig ist zu bemerken, daß sie nicht auf die zuerst besprochene Art der Integrale angewendet werden kann. Dazu betrachten wir das folgendermaßen definierte Integral

$$J_1 \equiv \int_0^{\infty} d\tau e^{-(\gamma + i\xi)\tau} e^{-\frac{1}{4}(k_0 u)^2 \tau^2}.$$

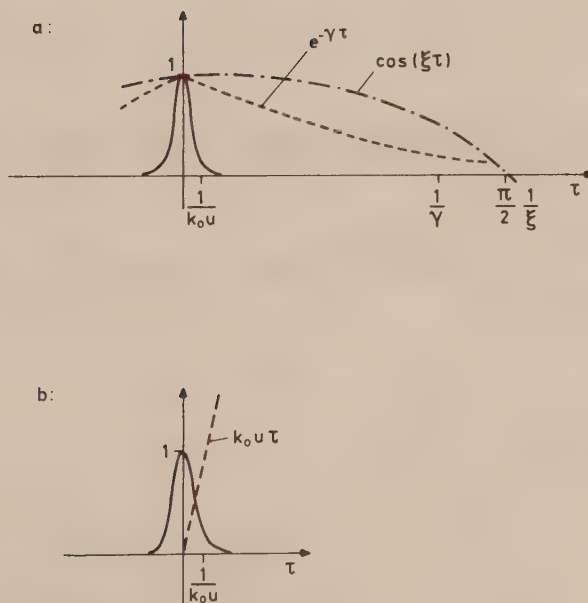
Die Figur 19a zeigt das Verhalten des Integranten im Grenzfall starker Doppler-Verbreiterung, d.h. $k_0 u \gg \gamma$ und $k_0 u \gg \xi$. Wir bemerken, daß in diesem Fall die Gauß-Kurve $e^{-1/4(k_0 u)^2 \tau^2}$ wie eine Deltafunktion wirkt. Somit gilt in diesem Fall die Beziehung

$$\delta(\tau) = \frac{k_0 u}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{4}(k_0 u)^2 \tau^2}$$

wobei der konstante Vorfaktor aus der Normierung

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \delta(\tau) = 1$$

folgt.



Figur 19: Darstellung der Integranten vom Integral J_1 (Fall a) und von J_2 (Fall b).

Damit finden wir für eine Funktion $G = G(\tau', \tau''')$, von der wir annehmen wollen, daß sie sich in der Zeiteinheit $1/k_0 u$ langsam verändert

$$\int_0^\infty d\tau' \int_0^\infty d\tau''' G(\tau', \tau''') e^{-\frac{1}{4}(k_0 u)^2 (\tau' - \tau''')^2} = \frac{2\sqrt{\pi}}{k_0 u} \int_0^\infty d\tau' G(\tau', \tau') \quad (G.8)$$

und

$$\int_0^\infty d\tau' \int_0^\infty d\tau''' G(\tau', \tau''') e^{-\frac{1}{4}(k_0 u)^2 (\tau' + \tau''')^2} \sim \int_0^\infty d\tau' \int_0^\infty d\tau''' G(\tau', \tau''') \delta(\tau' + \tau''') = 0. \quad (G.9)$$

Mit Hilfe dieser Beziehungen können wir jetzt einen Teil der Integrale ausführen und erhalten als Ergebnis

$$\begin{aligned} p_{ab}^{(3)}(t, z) = & -2im_0(1 + \frac{1}{2}h \sin \Omega t) \mu_0^3 e^{-i(\nu_0 t + \phi_0 - k_0 z)} \left\{ \sqrt{\pi} \frac{\gamma}{k_0 u} \frac{1}{\gamma^2 \gamma_a} + \right. \\ & + \left(\frac{1}{4} h k_0 z \right) \frac{2\sqrt{\pi}}{k_0 u} \left[\sum_{s=\pm 1} s e^{i s \Omega t} \left(\frac{1}{2\gamma \gamma_a} - \frac{1}{\gamma_a (2\gamma + i s \Omega)} - \frac{1}{(\gamma_a + i s \Omega)(2\gamma + i s \Omega)} \right) \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2(\gamma_a + i s \Omega)(\gamma + i s \Omega)} \right) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{u^3 k_0^2}{z} (\mathcal{E}_- - \mathcal{E}_+) \right] \left. \right\} \end{aligned} \quad (G.10)$$

wobei wir die Abkürzungen

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_- & \equiv \int_0^\infty d\tau' \int_0^\infty d\tau'' \int_0^\infty d\tau''' \mathcal{L}_-(\tau' - \tau''') e^{-\frac{(\gamma + i\Delta)\tau'''}{e} - \frac{\gamma_a \tau''}{e} - \frac{(\gamma - i\Delta)\tau'}{e} - \frac{1}{4}(k_0 u)^2 (\tau' - \tau''')^2} \\ \mathcal{E}_+ & \equiv \int_0^\infty d\tau' \int_0^\infty d\tau'' \int_0^\infty d\tau''' \mathcal{L}_+(\tau' + \tau''') e^{-\frac{(\gamma + i\Delta)\tau'''}{e} - \frac{\gamma_a \tau''}{e} - \frac{(\gamma + i\Delta)\tau'}{e} - \frac{1}{4}(k_0 u)^2 (\tau' + \tau''')^2} \end{aligned}$$

eingeführt haben.

Die Integrale $\mathcal{E}_+$ können nicht mit der oben erläuterten Methode, d.h. mit den Gln. (G.8) und (G.9) berechnet werden, da sie von der Form

$$\gamma_2 \equiv (k_0 u) \int_0^\infty d\tau \tau e^{-\frac{(\gamma + i\frac{\Omega}{2})\tau}{e} - \frac{1}{4}(k_0 u)^2 \tau^2}$$

sind und die Funktion $(k_0 u) \tau e^{-(\gamma + i\xi)\tau}$ nicht mehr langsam veränderlich ist. Dies ist aus Fig. 19b klar ersichtlich. Wir werden abschließend eine Methode zur Berechnung der Integrale $\mathcal{C}_{\pm}$ angeben.

Dazu gehen wir von dem folgendermaßen definierten Integral aus

$$I_{-}(\xi_1, \xi_2) = \int_0^{\infty} d\tau''' \int_0^{\infty} d\tau' (\tau' - \tau''') e^{-\frac{1}{4}(k_0 u)^2 (\tau' - \tau''')^2} e^{-(\gamma + i\xi_1)\tau'''} e^{-(\gamma - i\xi_2)\tau'} \quad (G.11)$$

Durch die Variablentransformation

$$2x \equiv \tau' - \tau'''$$

$$2y \equiv \tau' + \tau'''$$

finden wir

$$I_{-} = \int_0^{\infty} dy \int_{-y}^y dx x e^{-[2\gamma + i(\xi_1 - \xi_2)]y} e^{i(\xi_1 + \xi_2)x} e^{-(k_0 u)^2 x^2}$$

wobei die Änderung der Integrationsgrenzen aus Fig. 20 ersichtlich ist.

Sodann vertauschen wir die Reihenfolge der Integrationen

$$\int_0^{\infty} dy \int_0^y dx = \int_0^{\infty} dx \int_x^{\infty} dy,$$

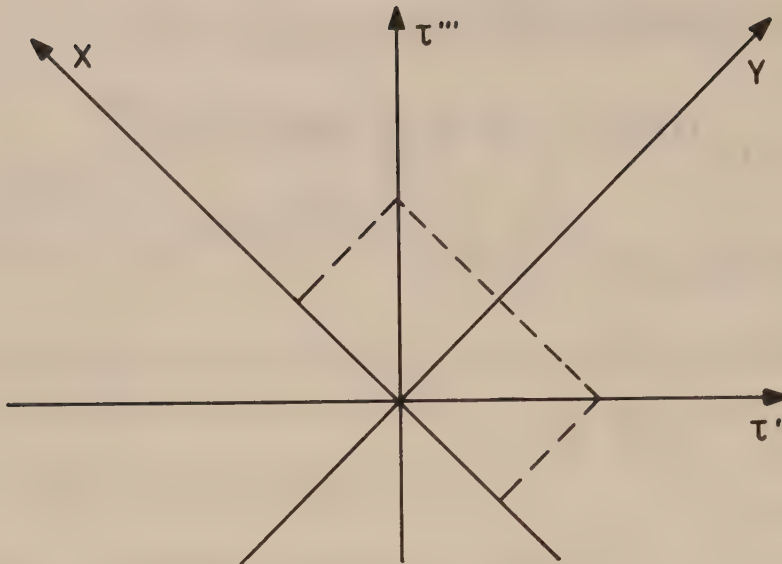
sodaß wir die Integration über y ausführen können. Hieraus ergibt sich jetzt das Integral I_{-} zu

$$I_{-}(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2\gamma + i(\xi_1 - \xi_2)} \int_0^{\infty} dx x e^{-\frac{1}{4}(k_0 u)^2 x^2} \left(e^{-2(\gamma - i\xi_2)x} - e^{-2(\gamma + i\xi_1)x} \right).$$

Partielle Integration und anschließende quadratische Ergänzung liefert schließlich

$$I_{-}(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2(k_0 u)^2} \frac{\sqrt{\pi}}{2\gamma + i(\xi_1 - \xi_2)} \left\{ \frac{\gamma + i\xi_1}{k_0 u} e^{\left(\frac{\gamma + i\xi_1}{k_0 u}\right)^2} \left(1 - \phi\left(\frac{\gamma + i\xi_1}{k_0 u}\right)\right) - \left(\frac{\gamma - i\xi_2}{k_0 u}\right) e^{\left(\frac{\gamma - i\xi_2}{k_0 u}\right)^2} \left(1 - \phi\left(\frac{\gamma - i\xi_2}{k_0 u}\right)\right) \right\}$$

(G.12)



Figur 20: Transformation der Variablen τ' und τ''' .

wobei wir die Fehlerfunktion¹⁰⁵

$$\phi(z) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z dt e^{-t^2}$$

eingeführt haben.

Im Grenzfall starker Doppler-Verbreiterung $\gamma/(k_0 u) \ll 1$ vereinfacht sich dieses Ergebnis zu

$$\begin{aligned} I_-(\xi_1; \xi_2) = & \frac{2\sqrt{\pi}}{2(k_0 u)^2} \frac{1}{2\gamma + i(\xi_1 - \xi_2)} \left\{ e^{-\left(\frac{\xi_1}{k_0 u}\right)^2} i\left(\frac{\xi_1}{k_0 u}\right) \cdot \right. \\ & \cdot \left(1 - \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\xi_1}{k_0 u}} dx e^{-x^2}\right) + e^{-\left(\frac{\xi_2}{k_0 u}\right)^2} i\left(\frac{\xi_2}{k_0 u}\right) \left(1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\xi_2}{k_0 u}} dx e^{-x^2}\right) \left. \right\} \end{aligned}$$

Neben diesem Integral treten in $\mathfrak{C}_-$ auch noch Integrale von der Form

$$I_-'''(\eta_1; \eta_2) = \int_0^\infty d\tau''' \int_0^\infty d\tau' \tau''' (\tau' - \tau''') e^{-\frac{1}{2}(\gamma + i\eta_1)\tau'''} e^{-\frac{1}{2}(\gamma - i\eta_2)\tau'} e^{-\frac{1}{4}(\ell_0 u)^2(\tau' - \tau''')^2}$$

und

$$I_-'(\eta_1; \eta_2) = \int_0^\infty d\tau''' \int_0^\infty d\tau' \tau' (\tau' - \tau''') e^{-\frac{1}{2}(\gamma + i\eta_1)\tau'''} e^{-\frac{1}{2}(\gamma - i\eta_2)\tau'} e^{-\frac{1}{4}(\ell_0 u)^2(\tau' - \tau''')^2}$$

auf. Diese können wir durch Differentiation von Gl. (G.11) gemäß

$$I_-'''(\eta_1; \eta_2) = \frac{\partial I_-(\xi_1; \xi_2)}{\partial (-i\xi_1)} \bigg|_{\xi_1 = \eta_1; \xi_2 = \eta_2}$$

$$I_-'(\eta_1; \eta_2) = \frac{\partial I_-(\xi_1; \xi_2)}{\partial (i\xi_2)} \bigg|_{\xi_1 = \eta_1; \xi_2 = \eta_2}$$

aus Gl. (G.12) bzw. (G.13) berechnen.

Dazu analog gehen alle in $\mathfrak{C}_+$ auftretenden Integrale aus der Grundform

$$I_+(\xi_1, \xi_2) = \int_0^\infty d\tau' \int_0^\infty d\tau''' (\tau' + \tau''') e^{-\frac{1}{2}(\gamma + i\xi_1)\tau'} e^{-\frac{1}{2}(\gamma + i\xi_2)\tau'''} e^{-\frac{1}{4}(\ell_0 u)^2(\tau' + \tau''')^2}$$

hervor.

Referenzen:

1. O. Heaviside, Electromagnetic Theory, (London, 1883), Appendix 1, (siehe auch Neuauflage O. Heaviside, Electromagnetic Theory, (Chelsea Publishing Company, New York, 1971) S. 455.
2. R.L. Forward, Proc. IRE 49, 892 (1961).
3. V.B. Braginsky, C.M. Caves und K.S. Thorne, Phys. Rev. D 15, 2047 (1977).
4. Siehe z.B.: W. Schleich und M.O. Scully, "General Relativity and Modern Optics", in: Modern Trends in Atomic and Molecular Physics, Proceedings of the Les Houches Summer School, Session XXXVIII, Herausgeber: R. Stora und G. Grynberg (North-Holland, im Druck).
5. H. Thirring, Phys. Zeits. 19, 33 (1918), und Erratum H. Thirring, Phys. Zeits. 22, 29 (1921).
6. A. Einstein, Phys. Zeits. 14, 1249 (1913), siehe auch: A. Einstein, S.B. Preuss. Akad. Wiss. 154 (1918).
7. Eine Zusammenfassung der Weberschen Experimente findet sich in: J. Weber, "Gravitational radiation experiments and instrumentation", Proceedings of Course 56 of the International School of Physics "Enrico Fermi" (Academic Press, New York, 1973).
8. Siehe z.B.: H.C. Ohanian, Gravitation and Spacetime, (W.W. Norton and Company, New York, 1976).
9. Eine Diskussion dieser alternativen Theorien findet sich im Kapitel 39 des Buches von C.W. Misner, K.S. Thorne und J.A. Wheeler, Gravitation (Freeman; San Francisco, 1973).
10. L.I. Schiff, Am.J.Phys. 28, 340 (1960)
11. W. Rindler, Am. J. Phys. 36, 540 (1968).
12. Abgedruckt auf S. 234 in: A. Sommerfeld, Elektrodynamik, bearbeitet von F. Bopp und J. Meixner, (Akademische Verlagsgesellschaft Geest und Portig, Leipzig 1964). Siehe auch: M. Kohler, Z. Physik 130, 139 (1951), N.L. Balazs, Z. Physik 154, 264 (1959).

Nach Kohler kann das Schwarzschildsche Linienelement nicht mittels des Äquivalenzprinzips und einer bloßen Koordinatentransformation aus dem Minkowskischen gewonnen werden, da bei letzterem alle Komponenten des Krümmungstensors verschwinden, während dies beim Schwarzschildschen nicht der Fall ist. Balazs jedoch hält dieses Argument für nicht stichhaltig, da nur "lokale Koordinatentransformationen" auftreten (er transformiert nur die Differentiale dt , dr , $d\theta$, $d\varphi$ und nicht t , r , θ , φ).

13. H.A. Hill, R.J. Bas, und P.R. Goode, Phys. Rev. Lett. 49, 1794 (1982).
J.W. Moffat, Phys. Rev. Lett. 50, 709 (1983).
14. Eine zusammenfassende Darstellung findet sich bei: C.O. Alley, "Proper Time Experiments in Gravitational Fields with Atomic Clocks, Aircraft and Laser Light Pulses", in: Quantum Optics, Experimental Gravity and Measurement Theory, Herausgeber: P. Meystre und M.O. Scully (Plenum Press, New York, 1983).
15. Siehe z.B.: C.O. Alley, "Laser Ranging to Retro Reflectors on the Moon as a Test of Theories of Gravity" in: Quantum Optics, Experimental Gravity and Measurement Theory, Herausgeber: P. Meystre und M.O. Scully (Plenum Press, New York, 1983).
16. R. Drever, Vortrag am Max-Planck-Institut für Quantenoptik, Garching (1982).
17. J. Plebanski, Phys. Rev. 118, 1396 (1960), siehe auch: J.E. Tamm, J. Russ. Phys. Chem. Soc. 56, 284 (1924).
18. I.I. Shapiro, Phys. Rev. Lett. 20, 1265 (1968).
19. G.B. Skrotskii, Soviet Phys. - Doklady 2, 226 (1957), [Dobl. Akad. Nauk. SSSR, 114, 81 (1957)].
20. N.L. Balazs, Phys. Rev. 110, 236 (1958).
21. C.G. Sagnac, C.R. Acad. Sci. 157, 708 (1913).
Eine zusammenfassende Darstellung findet sich in: E.J. Post, Rev. Mod. Phys. 39, 475 (1967).
22. M.O. Scully, "Suggestion and Analysis for a New Optical Test of General Relativity" in: Laser Spectroscopy IV., Herausgeber: H. Walther und H. Rothe (Springer, Berlin, 1979).
Siehe auch: H. Dehnen, Z. Naturforschung 22a, 816 (1967) und A.M. Volkov und V.A. Kiselev, Sov. Phys. - JETP 28, 1272 (1969) [Zh. Eksp. Teor. Fiz. 58, 1857 (1970)].
23. M.O. Scully, M.S. Zubairy und M.P. Haugan, Phys. Rev. A24, 2009 (1981).
24. Eine zusammenfassende Darstellung über Ring-Laser-Gyroskope findet sich in: W. Chow, J. Gea-Banacloche, L. Pedrotti, V. Sanders, W. Schleich und M.O. Scully, eingereicht zur Veröffentlichung bei Rev. Mod. Phys.
25. Siehe z.B.: F. Aronowitz, "The Laser Gyro" in: Laser Applications, Vol. 1, Herausgeber: M. Ross, (Academic Press, New York, 1977).
26. W. Schleich, Quantenfluktuationen in Ring-Laser Gyroskopen, Max-Planck-Institut für Quantenoptik, Bericht Nr. 54, Diplomarbeit, Ludwig-Maximilians-Universität München, (1981).

27. J.D. Cresser, W.H. Louisell, P. Meystre, W. Schleich und M.O. Scully, Phys. Rev. A25, 2214 (1982).
28. J.D. Cresser, D. Hammonds, W.H. Louisell, P. Meystre und H. Risken, Phys. Rev. A25, 2226 (1982).
29. J.D. Cresser, Phys. Rev. A26, 398 (1982).
30. Auch in der UDSSR wurde an diesem Problem gearbeitet; siehe z.B.: Yu. L. Klimontovich, A.S. Kovalev und P.G. Landa, Sov. Phys. USPEKHI 15, 95 (1972), [Usp. Fiz. Nauk. 106, 279 (1972)]
31. T.J. Hutchings und D.C. Stjern, "Scale factor non-linearity of a body dithered laser gyro", in: Proc. IEEE 1978, Nat. Aerospace and Electronic Conf. (NAECON 1978) 549.
32. Yu. E. Nesterikhin, S.G. Rautian, und G.I. Smirnov, Sov. Phys. JETP 48, 1 (1978) [Zh. Eksp. Teor. Fiz. 75, 3 (1978)]. Eine leicht veränderte Version mit denselben Autoren findet sich in: Sov. J. Quantum Electron. 8, 1040 (1978) [Kvan. Elektr. 5, 1833 (1978)].
33. M.O. Scully, persönliche Mitteilung, Bad Windsheim (1981).
34.
 - a) A. Brillet und P. Tournenc, "Discussion on optical detectors of gravitational radiation" in: Gravitational Radiation, Proceedings of the Les Houches Summer School, Session XXXVII, Herausgeber: N. Deruelle und T. Piran (North Holland, Amsterdam, 1983)
 - b) P. Tournenc, T. Damour, J. Sharma und C.J. Bordé, "Ultra high resolution laser spectroscopy of atoms as a probe of gravitational fields including gravitational radiation", in: Abstracts of Contributed Papers to 10th International Conference on General Relativity and Gravitation, Herausgeber: B. Bertotti, F. de Felice, A. Pascolini (Consiglio Nazionale Delle Ricerche, Roma 1983).
35. C.J. Bordé, J. Sharma, P. Tournenc und T. Damour, eingereicht zur Veröffentlichung bei Lett. J. de Phys. (Paris).
36. W. Schleich, C.-S. Cha und J.D. Cresser, angenommen zur Veröffentlichung bei Phys. Rev. A.
37. W. Schleich, M.O. Scully und V. Sanders, "Quantum Noise in Ring-Laser Gyroscopes" in: Proceedings of the 5th Rochester Conference on Coherence and Quantum Optics, 1983, Herausgeber: E. Wolf und L. Mandel (im Druck).
38. W.E. Lamb, Jr., Phys. Rev. 134, 1429 (1964).
39. Eine leicht lesbare Diskussion der Rolle des Lasers zu Tests der Grundlagen der Physik findet sich in: A. Barut, P. Meystre und M.O. Scully, Laser Focus, 18-10, 49 (1982).
40. M.O. Scully und K. Drühl, Phys. Rev. A25, 2208 (1982).

41. Ein guter Übersichtsartikel dazu ist: J. Clauser und A. Shimony, Rep. Prog. Phys. 41, 1882 (1978). Tests der Bellschen Ungleichung finden sich in: A. Aspect, Ph. Grangier, und G. Roger, Phys. Rev. Lett. 49, 91 (1982); A. Aspect, J. Dalibard, und G. Roger, Phys. Rev. Lett. 49, 1804, (1982).
42. Siehe z.B.: M.A. Bouchiat, J. Guena und L. Pottier, Opt. Comm. 37, 265 (1981) und Referenzen hierin.
43. D. Kleppner, R.F.C. Vessot, und N.F. Ramsey, Astrophys. Space Sci. 6, 13 (1970).
44. R.V. Pound und G.A. Rebka, Phys. Rev. Lett. 4, 337 (1960), R.V. Pound und J.L. Snider, Phys. Rev. Lett. 13, 539 (1964).
45. J.G. Williams et al., Phys. Rev. Lett. 36, 551 (1976).
46. Eine gute Zusammenfassung findet sich in: K. Nordtvedt, Jr., Reports on Progress in Phys. 42, 631 (1982).
47. Siehe z.B. C. Will, "The theoretical tools of experimental gravitation", in: Experimental Gravitation, Herausgeber: B. Bertotti, (Academic Press, New York, 1974).
48. A. Einstein, Ann. Phys. (Leipzig) 51, 639 (1916).
49. V.R. Braginsky und V.I. Panov, Sov. Phys. JETP 34, 463 (1972), [Zh. Eksp. Teor. Fiz. 61, 873 (1971)].
50. R.H. Dicke, Rev. Mod. Phys. 29, 355 (1957).
51. L.I. Schiff, Proc. Nat. Acad. Sci. 45, 69 (1959)
52. M.P. Haugan und C.M. Will, Phys. Rev. Lett. 37, 1 (1976).
53. I.I. Shapiro, "Experimental Challenges Posed by the General Theory of Relativity" in: Some Strangeness in Proportion, A Centennial Symposium to Celebrate the Achievements of Albert Einstein, Herausgeber: H. Woolf (Addison-Wesley, Reading, 1980).
54. K. Nordtvedt Jr., Phys. Rev. 169, 1014 (1968); 170, 1186 (1968).
55. Siehe z.B.: V.N. Rudenko, Sov. Phys. Usp. 21, 893, (1978) [Usp. Fiz. Nauk. 126, 361 (1978)].
56. Ein guter Übersichtsartikel über den experimentellen Stand des Gravitationswellen Nachweises ist: V.B. Braginsky und V.N. Rudenko, Phys. Reports 46, 165 (1978).
57. Siehe auch: K.S. Thorne, "Experimental Gravity, Gravitational Waves and Quantum Nondemolition: An Introduction", in: Quantum Optics, Experimental Gravity and Measurement Theory, Herausgeber: P. Meystre and M.O. Scully (Plenum Press, New York 1983).
58. G. Moss, L. Müller, und R. Forward, Appl. Opt. 10, 2495 (1971).

59. Siehe z.B.: R.W.P. Drever, "Interferomagnetic detectors of gravitational radiation", in: "Gravitational Radiation, Proceedings of the Les Houches Summer School, Session XXXVII, Herausgeber: N. Deruelle und T. Piran (North-Holland, Amsterdam 1983) oder: A. Rüdiger, R. Schilling, L. Schnupp, W. Winkler, H. Billing und K. Maischberger, J. de Phys. 42-C8, 451 (1981).
60. F.K. Manasse und C.W. Misner, J. Math. Phys. 4, 735 (1963).
61. Siehe z.B.: W. Demtröder, Grundlagen und Techniken der Laserspektroskopie (Springer Verlag, Berlin, 1977).
62. C.W. Will und K. Nordtvedt Jr., Astrophys. J. 177, 757 (1982), 177, 775 (1982).
63. J. Lense und H. Thirring, Phys. Zeits. 19, 156 (1918).
64. Eine detaillierte und mathematisch rigorose Diskussion dieser Problematik ausgehend von den kovarianten Maxwell Gleichungen findet sich in: R.A. Breuer und J. Ehlers, Proc. R. Soc. Lond. A 370, 389 (1980), ibd. 374, 65 (1981).
65. Soldner, Berliner Astronomisches Jahrbuch für 1804 (Späthen, Berlin, 1801), S. 161.
66. A. Einstein, Ann. Phys. (Leipzig), 35, 898 (1911); die korrekte Berechnung findet sich in: A. Einstein, Ann. Phys. (Leipzig), 49, 769 (1916).
67. Ya. B. Zel'dovich, Sov. Phys. JETP 35, 1085 (1972). [Zh. Eksp. Teor. 62, 2076, (1972)], A.A. Starobinskii, Sov. Phys. JETP 37, 28 (1973) [Zh. Eksp. Teor. Fiz. 64, 48 (1973)]; A.A. Starobinskii und S.M. Churilov, Sov. Phys. JETP 38, 1 (1974) [Zh. Eksp. Teor. Fiz. 65, 3 (1973)]; W.H. Press und S.A. Teukolsky, Nature 238, 211 (1972).
68. R. Karplus und M. Neuman, Phys. Rev. 80, 380 (1950).
69. R. Tolman, P. Ehrenfest und B. Podolsky, Phys. Rev. 37, 602 (1931).
70. M.O. Scully, Phys. Rev. D 19, 3582 (1979).
71. M.E. Gertsenstein, Sov. Phys. JETP 14, 84 (1962); [J. Expl. Theoret. Phys. (U.S.S.R.) 41, 113 (1961)].
72. L. Landau und E. Lifshitz, The Classical Theory of Fields, (Pergamon Press, Oxford, 1975).
73. Eine Diskussion des Übergangs von der Wellenoptik zur geometrischen Optik in der allgemeinen Relativitätstheorie findet sich in: a) J. Ehlers, "Generalized electromagnetic null fields and geometrical optics" in: Perspectives in Geometry and Relativity, (Indiana Press 1966); b) J. Ehlers, Z. Naturforschung 22a, 1328 (1967).

74. I.I. Shapiro, M.E. Ash, D.B. Cambell, R.B. Dyce, R.P. Ingalls, R.F. Jurgens und G.H. Pettengill, Phys. Rev. Lett. 26, 1132 (1971).
J.P. Anderson, P.B. Esposito, W.L. Martin und D.O. Muhleman, in: Davies 1971, S. 111
75. E. Mach, Die Mechanik (9. Auflage, Brockhaus, Wiesbaden 1933).
76. J. Ehlers und E. Schücking, Z. Phys. 206, 483 (1967)
77. Siehe Kapitel 22.4 in Ref. 9.
78. M. Sargent, M.O. Scully, W.E. Lamb, Jr., Laser Physics, (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1974).
79. Siehe z.B. auch: A. Eddington, Space, Time and Gravitation (University Press, Cambridge, 1966).
80. Eine ausgezeichnete Diskussion der Testmöglichkeiten der allgemeinen Relativitätstheorie findet sich in Kapitel 38 in Ref. 9.
81. Die klassische Sagnac Frequenzverschiebung in einem nichtebenen Gyroskop ohne Gravitationsfelder findet sich in: S.F. Jacobs und R. Zanoni, Am.J.Phys. 50(7), 659 (1982).
82. G.F. Smoot, M.V. Gorenstein und R.A. Muller, Phys. Rev. Lett. 39, 898 (1977); G.F. Smoot und P.M. Lubin, Astrophys. J. 234, L83 (1979).
83. Siehe z.B.: J.D. Jackson, Classical Electrodynamics, (J. Wiley, New York, 1975).
84. V.V. Batygin und I.N. Toptygin, Problems in Electrodynamics, (Academic Press, New York, 1964).
85. Siehe die Diskussion in: T.A. Dorschner, H.A. Haus, M. Holz I.W. Smith und H. Statz, IEEE J. Quant. Elect. 16, 1376 (1980) und M.O. Scully, W. Chow, K. Drühl, H. Haus und V. Sanders, Conference on Quantum Optics, Snowbird (1983).
86. M.M. Tehrani und L. Mandel, Phys. Rev. A17, 677 (1978); ibd. A17, 694 (1978); S. Singh und L. Mandel, Phys. Rev. A20, 2459 (1979).
87. J. Killpatrick, IEEE Spectrum 4, 44 (1967).
88. Eine Möglichkeit bietet die Definition des "physikalischen Spektrums": J.H. Eberly und K. Wódkiewicz, J. Opt. Soc. Am. 67, 1252 (1977).
89. H.J. Breymayer, H. Risken, H.D. Vollmer und W. Wonneberger, Appl. Phys. B28, 335 (1982).
90. Siehe Kapitel III in Ref. 24.
91. Siehe in Ref. 25, S. 159.

92. J.J. Roland, G.P. Agrawal, Optics and Laser Technology 13, 239 (1981).
93. S. Stenholm, persönliche Mitteilung, Rochester N.Y. (1983).
94. Eine gute Übersicht über das Auftreten dieser Gleichung in der Physik findet sich in: H. Risken, "The Fokker Planck Equation, Methods of Solutions and Applications". Springer Series in Synergetics, Herausgeber: H. Haken, (Springer, Berlin-Heidelberg, in Druck).
95. B.D. Josephson, Adv. in Phys. 14, 419 (1965).
96. S. Shapiro, Phys. Rev. Lett. 11, 80 (1963).
97. N.R. Werthamer und S. Shapiro, Phys. Rev. 164, 523 (1967).
98. A. Erdélyi, Ann. Phys. 19, 40 (1934).
99. Eine Diskussion hierüber findet sich in Kapitel 4 von Ref. 78.
100. Eine Behandlung des Ring-Laser im Rahmen der semiklassischen Lasertheorie findet sich in: L. Menegozzi und W.E. Lamb, Jr., Phys. Rev. A8, 2103 (1973), F. Aronowitz, Phys. Rev. A139, 635 (1965).
101. Siehe auch: W.H. Louisell, Quantum Statistical Properties of Radiation (J. Wiley, New York, 1973).
102. R.L. Stratonovich, Topics in the Theory of Random Noise (Gordon und Breach, New York, 1967) Band II, siehe auch: H. Haken, R. Sauermann, Ch. Schmid und H.D. Vollmer, Z. Physik 206, 369 (1967).
103. M.O. Scully und W.E. Lamb, Jr. Phys. Rev. 159, 208 (1967).
104. M.O. Scully, V. Sanders und M. Sargent III, Opt. Lett. 3, 43 (1978); siehe auch: W. Chow, J. Hamblen, T. Hutchings, V. Sanders, M. Sargent III, und M.O. Scully, J. Quant. Elect. 16, 918 (1980).
105. W. Magnus, F. Oberhettinger, R.P. Soni, "Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics (Springer, Berlin-Heidelberg, 1966).
106. Yu.M. Ivanchenko und L.A. Zil'berman, Sov. Phys. JETP 28, 1272 (1969). [Zh. Eksp. Teor. Fiz. 55, 2395 (1968)].
107. B.S. Newberger, J. Math. Phys. 23, 1278 (1982).
108. J.D. Cresser, persönliche Mitteilung, München (1981).
109. W. Schleich, P. Dobiasch und H. Risken, in Vorbereitung.
110. H. Risken und H.D. Vollmer, Z. Physik. 173, 261 (1980).
111. H. Haken und H. Sauermann, Z. Physik. 173, 261 (1963) ibd. 176, 47 (1963); H. Haken, Z. Physik. 190, 327 (1966).

- 112. H. Haken, Laser Theory in: Handbuch der Physik, XXV/2c (Springer, Berlin, 1970).
- 113. W.E. Lamb, Jr. "Theory of optical laser oscillators" in: Quantum Electronics and Coherent Light, Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi", Course XXXI Herausgeber: P.A. Miles, (Academic Press, New York, 1964).
- 114. A.P. Kol'chenko und G.I. Smirnov, Sov. Phys. JETP 44, 486 (1976) [Zh. Eksp. Teor. Fiz. 71, 925 (1976)];
S.G. Rautian und G.I. Smirnov, Sov. Phys. JETP 47, 678 (1978) [Zh. Eksp. Teor. Fiz. 74, 1295 (1978)].
- 115. A.V. Braslavets, G.I. Smirnov, und V.F. Shmakov, Sov. J. Quantum Electron. 11, 171 (1981) [Kvan. Electron. 8, 287 (1981)], S.G. Rautian und G.I. Smirnov, Phys. Lett. A70, 387 (1979).
- 116. A. Yariv, Quantum Electronics, (J. Wiley, New York, 1975).
- 117. W. Schleich und M.O. Scully, eingereicht zur Veröffentlichung.
- 118. S. Haroche und F. Hartmann, Phys. Rev. A6, 1280 (1972).

Herrn Prof. M.O. Scully, der diese Arbeit angeregt hat, möchte ich für viele klärende Diskussionen über allgemeine Relativitätstheorie und Lasertheorie danken. Insbesondere gilt mein Dank seiner Gastfreundschaft während meines Aufenthalts an der Universität von New Mexico. Dem Direktorium des Max-Planck-Instituts für Quantenoptik, das mir diesen Aufenthalt ermöglicht hat, sei an dieser Stelle ebenfalls gedankt. Herrn Prof. H. Walther möchte ich für sein stetes Interesse an meiner Arbeit und seine Unterstützung danken. Herzlich danken möchte ich den Herren Professoren H.H. Wolter und J. Ehlers für ihre kritische Durchsicht des Manuskripts und für viele klärende Bemerkungen, die zu einer Verbesserung meiner Arbeit führten. Nicht unerwähnt dürfen die zahlreichen Diskussionen mit den Mitgliedern der Theoriegruppen des Max-Planck-Instituts für Quantenoptik und des Institute for Modern Optics (Albuquerque) bleiben, die mir eine stete Anregung während jeder Phase meiner Arbeit waren.

Den Damen J. Hecht, E. Krause und M. Wahl, die innerhalb kürzester Zeit meine Arbeit in eine lesbare Form brachten, und Frau Pfister, die die Zeichnungen anfertigte, möchte ich nochmals recht herzlich danken.

Biographische Daten Wolfgang, Peter S c h l e i c h

Geburtsdatum: 23. Februar 1957

Geburtsort: Mühldorf/Inn Bundesrepublik Deutschland

Staatsbürgerschaft: Deutsch

Ehestand: ledig

Adresse: dienstlich: Max-Planck-Institut für Quantenoptik
D-8046 Garching bei München (BRD)

privat: Andechser Straße 4
8000 München 70, BRD

Ausbildung:

Institution	Dauer	Abschluß
Promotionsstudium Physik Ludwig-Maximilians-Universität München	1982 - 1984	
Studium der Physik Ludwig-Maximilians-Universität München	1976 - 1981	Dipl. Phys. (Universität) (1981)
Studium für Lehramt an Gymnasien Mathematik/Physik LMU München	1976 - 1978	Vordiplom in Physik anerkannt als Vorexamen (1978)
	1979	Prüfung in Erziehungs- wissenschaften erfolgreich abgelegt

Bisherige Positionen:

Institution	Stelle	von - bis
Max-Planck-Institut für Quantenoptik, Garching	Doktorand (Prof. H. Wolter u. Prof. M.O. Scully)	seit Februar 1982
(beurlaubt an das Institute for Modern Optics, Albuquerque N.M.)	Project Assistant (Prof. M.O. Scully)	Oktober 1982 - Juli 1983 -
Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V., Projektgruppe für Laserforschung, Garching	Diplomand (Prof. H. Wolter u. Prof. M.O. Scully)	November 1980 - Dezember 1981

Liste der Veröffentlichungen:

1. W. Schleich, Quantenfluktuationen in Ring-Laser-Gyroskopen
MPQ Laborbericht No. 54 (1981)
2. J. D. Cresser, W. H. Louisell, P. Meystre, W. Schleich,
und M. O. Scully, Quantum noise in ring-laser gyros.
I. Theoretical formulation of problem, Phys. Rev. A 25:
2214 (1982)
3. W. Schleich, M. O. Scully, und V. Sanders, Quantum Noise
in Ring-Laser Gyroscopes, in: "Proceedings of the 5th
Rochester Conference on Coherence and Quantum Optics, 1983"
Ed. E. Wolf and L. Mandel (im Druck)
4. W. Schleich und M. O. Scully, General Relativity and Modern
Optics, in: "Modern Trends in Atomic and Molecular Physics,"
Proceedings of the Les Houches Summer School, Session XXXVIII,
1982, Ed. R. Stora und G. Grynberg (North-Holland, Amsterdam,
im Druck)
5. W. Schleich, C.-S. Cha, und J. D. Cresser, Quantum Noise in
a Dithered Ring-Laser Gyroscope, angenommen zur Veröffent-
lichung bei Phys. Rev. A
6. W. W. Chow, J. Gea-Banachloche, L. M. Pedrotti, V. E. Sanders,
W. Schleich, und M. O. Scully, The Ring-Laser-Gyro: A Tutorial
Review, eingereicht zur Veröffentlichung bei Rev. Mod. Phys.

